

Структурные сдвиги и единичные корни в нестационарных моделях временных рядов

Бродский Б.Е. (ЦЭМИ РАН)

1. Введение

В докладе речь пойдет о двух наиболее часто встречающихся моделях нестационарных временных рядов:

- *модели структурного сдвига*

и

- *модели единичного корня.*

Под **структурным сдвигом** мы будем понимать любое резкое изменение параметров рассматриваемой модели. Наличие **единичного корня** в характеристическом уравнении динамической модели приводит к появлению **стохастического тренда**.

Проблема тестирования нестационарностей различного вида в стохастических моделях временных рядов в 1980-2000е годы вызвала существенный исследовательский интерес. В эконометрических приложениях актуальны задачи тестирования и различения гипотез единичного корня и структурного сдвига как в одномерных временных рядах, так и в системах одновременных эконометрических уравнений. При обработке данных научного эксперимента часто актуален вопрос о том, какую модель нестационарности рядов наблюдений - стохастического тренда или разладки - следует положить в основу исследования.

В докладе рассматриваются методы решения этих задач в **непараметрической постановке**, когда известна лишь функциональная форма исследуемой модели, однако ни параметры этой модели, ни вероятностные законы распределения случайных помех не предполагаются известными. Именно подобные постановки задач наиболее актуальны в приложениях. Предложен новый метод различения гипотез структурного сдвига и единичного корня в многомерных стохастических моделях, доказаны теоремы о сходимости к нулю вероятностей ошибок тестирования при увеличении объема выборки, исследована эффективность метода в практических задачах.

Как замечает Перрон (2005) в обзоре современного состояния эконометрической теории нестационарных временных рядов, присутствие структурного сдвига резко снижает мощность известных тестов на единичные корни (например, ADF (Augmented Dickey-Fuller test) Dickey, Fuller (1979, 1981)), KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992))), и наоборот, тестирование структурного сдвига в моделях с единичным корнем крайне затруднено. В докладе предложен метод различения гипотез структурного сдвига и единичного корня в моделях временных рядов.

Для мотивировки дальнейших предположений рассмотрим следующую модель временного ряда, которая часто используется в приложениях. Предположим, что одномерный ряд $\{Y_t\}$ задается моделью $AR(p)$ т.е.

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + u_t,$$

где $\{u_t\}$ - последовательность н.о.р.с.в., описывающая случайные шумы в модели, $E(u_t) = 0$, $\sigma_u^2 = Var(u_t)$, $0 < \sigma_u^2 < \infty$.

Предположим, что характеристический полином

$$p(z) = 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p, \quad z \in \mathbf{C},$$

имеет единичный корень $p(1) = 0$ кратности 1, и все другие корни лежат вне единичного круга. Тогда $p(z) = p^*(z)(1 - z)$ и полином $p^*(z)$ не имеет корней внутри единичного круга. Это означает, что $1/p^*(z)$ существует при $|z| \leq 1$. Тогда имеем $p(L) = p^*(L)\Delta Y_t = u_t$, где L обозначает оператор запаздывания. Так как полином $p^*(L)$ обратим, имеем представление

$$Y_t = Y_{t-1} + \sum_{j \geq 0} \beta_j u_{t-j},$$

при некоторых коэффициентах $\{\beta_j\}$.

Это означает, что рассматриваемый процесс Y_t описывается моделью случайного блуждания с зависимыми ошибками.

2. Постановка задачи

С учетом приведенных выше аргументов и мотивировок будем рассматривать следующую постановку задачи различения гипотез:

Одномерный случай

- H_0 - стационарный временной ряд:

$$X_t = h + \rho X_{t-1} + u_t, \quad |\rho| < 1, \quad t = 1, \dots, N,$$

- H_1 - единичный структурный сдвиг в неизвестный момент $[\theta N]$, $0 < \theta < 1$:

$$X_t = \begin{cases} h + \rho X_{t-1} + u_t, & t \leq [\theta N] \\ \hat{h} + \hat{\rho} X_{t-1} + u_t, & t > [\theta N], \end{cases}$$

где $|\hat{h} - h| > 0$, $|\hat{\rho} - \rho| > 0$, $|\rho| < 1$, $|\hat{\rho}| < 1$.

H_2 - однократный единичный корень:

$$X_t = X_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, N.$$

Задача состоит в тестировании гипотез H_0, H_1, H_2 по наблюдениям Y_t , $t = 1, \dots, N$.

Случайные шумы u_t предполагаются зависимыми и удовлетворяющими условиям Крамера (отсутствие тяжелых "хвостов" распределений) и ψ -перемешивания (ослабевание зависимости "будущего" от "прошлого"). Точные формулировки этих условий см. ниже.

Приведенная постановка задачи допускает обобщение на

Многомерный случай.

Отметим, что понятие **единичный корень** изначально применимо лишь к одномерным временным рядам. Для многомерных динамических систем с вектором выходных переменных $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})$, каждая компонента которого является нестационарным процессом типа $I(1)$ (единичный корень), вводится понятие **коинтеграции** переменных. Суть этого понятия проявляется в следующем примере. Пусть эволюция вектора X_t описывается VAR-моделью вида:

$$X_t = \delta + \Theta_1 X_{t-1} + \dots + \Theta_p X_{t-p} + \epsilon_t.$$

Вводя оператор запаздывания L , преобразуем ее к виду:

$$\Theta(L)X_t = \delta + \epsilon_t,$$

где $\Theta(L) = E_k - \Theta_1 L - \dots - \Theta_p L^p$.

Определим матрицу

$$\Pi = -\Theta(1) = -(E_k - \Theta_1 - \dots - \Theta_p).$$

Возможны три случая:

- 1) Матрица Π имеет полный ранг и является обратимой. Тогда все компоненты вектора X_t являются стационарными процессами ($I(0)$);
- 2) $\Pi = 0$. Тогда компоненты X_t представляют собой независимые случайные блуждания $I(1)$;
- 3) Π имеет неполный ранг $0 < r < k$. Это случай коинтеграции. Существуют r коинтеграционных зависимостей между компонентами вектора X_t :

$$x_{it} = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x_{1t} + \dots + \alpha_{(i-1)t}x_{(i-1)t} + \alpha_{(i+1)t}x_{(i+1)t} + \dots + \alpha_{kt}x_{kt} + \xi_{it},$$

где $\xi_{it} \sim I(0)$, $1 \leq i \leq k$.

По теореме представления Engle-Granger (1987), существует эквивалентное описание динамики вектора X_t в форме *модели коррекции остатками*:

$$\Delta X_t = \delta + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \gamma \beta X_{t-1} + \epsilon_t,$$

где матрицы γ, β имеют порядок $k \times r$, $r \times k$ соответственно.

Естественным обобщением сформулированной выше задачи тестирования гипотез структурного сдвига и единичного корня на многомерный случай является следующая *задача*:

Тестировать гипотезу наличия долгосрочных коинтеграционных зависимостей между компонентами $x_{1t}, \dots, x_{kt}$, описывающих условия долгосрочного равновесия в рассматриваемой системе, с остатками типа $I(0)$. Далее тестировать гипотезу наличия структурных сдвигов в модели коррекции остатками, описывающих нестационарность среднесрочных и краткосрочных режимов функционирования системы.

3. Метод

В содержательном плане между гипотезами H_1 и H_2 имеется существенное различие. Гипотеза H_2 единичного корня описывает "грубый" статистический эффект возрастания дисперсии наблюдений с увеличением объема выборки. Аналогично гипотеза H_1 включает в себя "грубый" эффект изменения среднего ряда. Однако гипотеза H_1 может включать также "тонкий" эффект изменения автокорреляционной функции ряда (при изменении коэффициента авторегрессии ρ).

Одномерный случай

Предлагаются две различных статистики для обнаружения "грубых" и "тонких" эффектов.

Основная статистика, которая будет использоваться для тестирования "грубых" эффектов, имеет вид:

$$Z_N(n) = \frac{1}{N^2} \left(n \sum_{j=1}^N X_j - N \sum_{j=1}^n X_j \right), \quad n = 1, \dots, N.$$

Зафиксируем параметр $0 < \alpha < 1/2$. Решающее правило, основанное на статистике

$$T_N = \max_{[\alpha N] \leq n \leq [(1-\alpha)N]} |Z_N(n)|$$

и пороговой границе $0 < C$, имеет вид:

$$d_N = \begin{cases} 0, & \text{если } T_N \leq C \text{ принимается гипотеза } H_0 \\ 1, & \text{если } T_N > C \text{ принимается совместная альтернатива } H_1 \& H_2 \end{cases}$$

В случае $T_N > C$ строится оценка

$$\hat{n} = \arg \max |Z_N(n)|,$$

и оценка $\hat{\theta}_N = \hat{n}/N$.

Более точно: статистика $Z_N(\cdot)$ используется для проверки гипотезы единичного корня и структурного сдвига по математическому ожиданию наблюдений. Для проверки гипотезы о структурном сдвиге по коэффициенту авторегрессии используется вторая статистика. Представим ее в следующем обобщенном виде.

Многомерный случай

Рассматривается модель наблюдений:

$$V(n) = \Pi U(n) + \nu_n,$$

где V - вектор зависимых переменных размерности $M \times 1$; ν - последовательность случайных шумов; U - вектор объясняющих переменных размерности $K \times 1$; Π - матрица коэффициентов размерности $M \times K$. В частности, вектор U может включать в себя все лагированные эндогенные переменные, а также все экзогенные переменные. В рассмотренном выше случае вектор U равен: $U(t) = (1, X_{t-1})'$.

Рассматриваются следующие гипотезы:

H_0 - матрица $\Pi = \text{const}$;

H_1 :

$$\Pi = \Pi(n) = \mathbf{a}I(n \leq m) + \mathbf{b}I(n > m), \quad n = N, N+1, \dots$$

где $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| > 0$.

Метод тестирования основан на следующей статистике. Определим следующие матрицы размера $K \times K$:

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i=1}^n U(i)U'(i), \quad n = 1, \dots, N$$

и матрицы размера $K \times M$:

$$z_n = \sum_{i=1}^n U(i)V'(i), \quad n = 1, \dots, N.$$

Решающая статистика имеет вид:

$$Y_N(n) = \frac{1}{N} (z_n - \mathcal{T}(n)(\mathcal{T}(N))^{-1}z_N), \quad n = 1, \dots, N.$$

Зафиксируем параметр $0 < \alpha < 1/2$. Решающее правило, основанное на статистике

$$Q_N = \max_{[\alpha N] \leq n \leq [(1-\alpha)N]} \|Y_N(n)\|$$

и пороговой границе $0 < C$, имеет вид:

$$d_N = \begin{cases} 0, & \text{если } Q_N \leq C \text{ принимается гипотеза } H_0 \\ 1, & \text{если } Q_N > C \text{ принимается совместная альтернатива } H_1 \& H_2 \end{cases}$$

В случае $Q_N > C$ строится оценка

$$\hat{n} = \arg \max \|Y_N(n)\|,$$

и оценка $\hat{\theta}_N = \hat{n}/N$.

Более точно: статистика $Y_N(\cdot)$ используется для тестирования "тонких" эффектов структурных сдвигов по коэффициентам авторегрессии. Вместе с тем, "грубые" эффекты также могут оказывать влияние на статистику $Y_N(n)$. Поэтому для различения гипотез структурного сдвига и единичного корня используется второй этап метода. Поясним подробно, как он работает.

Одномерный случай

Первый этап метода состоит в вычислении статистик $Z_N(\cdot)$ и $Y_N(\cdot)$, которые далее сравниваются с решающими порогами $C_Z(N)$ и $C_Y(N)$ соответственно.

По итогам первого этапа метода, могут представиться следующие альтернативы: $\bar{Z}_N \bar{Y}_N$ - принимается гипотеза H_0 (черта сверху над соответствующей статистикой означает, что она не вышла на решающий порог) и вычисления прекращаются; а также $\bar{Z}_N Y_N, Z_N \bar{Y}_N, Z_N Y_N$. В трех последних случаях переходим к второму этапу метода.

На **втором этапе** происходит различение альтернатив H_1 и H_2 . Содержательный принцип этого различения основан на следующем факте: при гипотезе H_1 оценка параметра структурного сдвига $\hat{\theta}_N = \hat{n}/N$, построенная по выборке $Y_1, \dots, Y_N$, сходится к истинному параметру структурного сдвига θ п.н. при возрастании объема выборки N т.е.

$$\hat{\theta}_N \rightarrow \theta \quad H_1 - \text{a.s. as } N \rightarrow \infty.$$

В ситуации единственного структурного сдвига этот факт позволяет различить гипотезы H_1 и H_2 :

$$\begin{aligned} 1) \bar{Z}_N \bar{Y}_N &\rightarrow H_0 \\ 2) \bar{Z}_N Y_N &\rightarrow \hat{\theta}_N(Y) \rightarrow \begin{cases} Z_N(\hat{\theta}_N) \rightarrow H_2 \\ \bar{Z}_N(\hat{\theta}_N) \rightarrow H_{1r} \end{cases} \\ 3) Z_N \bar{Y}_N &\rightarrow \hat{\theta}_N(Z) \rightarrow \begin{cases} Z_N(\hat{\theta}_N) \rightarrow H_2 \\ \bar{Z}_N(\hat{\theta}_N) \rightarrow H_{1m} \end{cases} \\ 4) Z_N Y_N &\rightarrow \hat{\theta}_N(Y) \rightarrow \begin{cases} Z_N(\hat{\theta}_N) \rightarrow H_2 \\ \bar{Z}_N(\hat{\theta}_N) \rightarrow H_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Иначе говоря:

1) Если обе статистики на первом этапе не выходят на решающий порог, то принимается гипотеза H_0 (стационарный ряд);

2) Если статистика Z не выходит на порог, а статистика Y , напротив, выше порога, то строится оценка $\hat{\theta}_N(Y)$ параметра θ с использованием статистики Y и далее по подвыборке $(X_1, \dots, X_{[\hat{\theta}_N N]})$ - вычисляется статистика $Z_N(\hat{\theta}_N)$. Если $Z_N(\hat{\theta}_N)$ выходит на соответствующий решающий порог, то принимается гипотеза H_2 , в противном случае принимается гипотеза H_1 (структурный сдвиг по коэффициентам авторегрессии);

3) Если статистика Z выходит на порог, а статистика Y , напротив, ниже порога, то строится оценка $\hat{\theta}_N(Z)$ параметра θ с использованием статистики Z_N и далее по подвыборке $(X_1, \dots, X_{[\hat{\theta}_N N]})$ - вычисляется статистика $Z_N(\hat{\theta}_N)$. Если $Z_N(\hat{\theta}_N)$ выходит на соответствующий решающий

порог, то принимается гипотеза H_2 , в противном случае принимается гипотеза H_1 (структурный сдвиг по среднему);

4) Если статистика Z выходит на порог и статистика Y также выше порога, то строится оценка $\hat{\theta}_N(Y)$ параметра θ с использованием статистики Y и далее по подвыборке $(X_1, \dots, X_{[\hat{\theta}_N N]})$ - вычисляется статистика $Z_N(\hat{\theta}_N)$. Если $Z_N(\hat{\theta}_N)$ выходит на соответствующий решающий порог, то принимается гипотеза H_2 , в противном случае принимается гипотеза H_1 .

Многомерный случай

В многомерном случае тестирование гипотез о наличии коинтеграции и структурного сдвига осуществляется следующим образом:

1) Для каждого компонента вектора $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ строится регрессионная зависимость от всех остальных компонентов, например, $x_{1t} = f(x_{2t}, \dots, x_{kt})$. Ряд остатков этой зависимости проверяется на стационарность ($I(0)$) против альтернативы единичного корня ($I(1)$) с использованием статистики $Z_N(\cdot)$. Обычно из содержательных соображений удается сразу отсеять множество "бессмысленных" регрессий и вести число тестируемых коинтеграционных зависимостей к $r \leq k - 1$.

2) Далее вектор построенных коинтеграционных остатков βX_{t-1} подставляется в модель коррекции остатками, которая тестируется на наличие структурного сдвига с использованием статистики $Y_N(\cdot)$.

4. Основные результаты

Предложенный метод основан на свойствах статистик Z_N и Y_N , которые исследованы и подытожены в теоремах 1 и 2.

В начале сформулируем предположения, при которых изучаются свойства этих статистик.

Условие Крамера

Будем предполагать, что для последовательности u_i выполнено *равномерное условие Крамера*, если существует константа $H > 0$ такая, что для всех i

$$Ee^{tu_i} < \infty, \quad |t| < h.$$

Для центрированной последовательности u_i (именно такие последовательности рассматриваются в докладе) это условие эквивалентно следующему: существуют числа $T > 0, g > 0$ такие, что для всех i

$$Ee^{tu_i} < \exp\left(\frac{1}{2}gt^2\right), \quad |t| < T.$$

В случае центрированной последовательности векторов u_i предполагается, что сформулированное условие Крамера выполнено для каждого компонента вектора.

Условие ψ -перемешивания

Напомним, что все случайные величины рассматриваются на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим фильтрацию $\{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \mathcal{F}_n \subset \mathfrak{F}$, где $\mathcal{F}_n$ можно трактовать, как объем информации, доступной к моменту n .

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ - σ -алгебры, содержащиеся в $\mathfrak{F}$. Обозначим через $L_p(\mathcal{H})$ - множество L_p -интегрируемых случайных величин, измеримых относительно σ -алгебры $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Определим следующую меру зависимости между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$:

$$\psi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \sup_{A \in \mathcal{H}_1, B \in \mathcal{H}_2, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0} \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1 \right|$$

Пусть $(\xi_i, i \geq 1)$ - последовательность случайных векторов на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Обозначим через $\mathfrak{F}_s^t = \sigma\{\xi_i : s \leq i \leq t\}, 1 \leq s \leq t < \infty$ минимальную σ -алгебру, порожденную векторами $\xi_i, s \leq i \leq t$. Положим

$$\psi(n) = \sup_{t \geq 1} \psi(\mathfrak{F}_1^t, \mathfrak{F}_{t+n}^\infty)$$

Последовательность $(\xi_i; i \geq 1)$ удовлетворяет условию ψ -перемешивания, если величины $\psi(n)$ коэффициенты ψ -перемешивания) сходятся к нулю при неограниченном возрастании n .

Теорема 1 (статистика $Z_N(\cdot)$)

Пусть последовательность шумов u_n является мартингал-разностью относительно потока $\mathcal{F}_n$ и для нее выполнены равномерное условие Крамера и условие ψ -перемешивания, сформулированные выше. Тогда вероятности ошибок $P_0(H_1 \text{ or } H_2), P_1(H_0), P_2(H_0)$ стремятся к нулю с увеличением объема выборки N .

Более того, при гипотезе H_{1m} (структурный сдвиг по среднему) отнормированная оценка момента структурного сдвига $\hat{n}/N$ сходится почти наверно к истинному параметру структурного сдвига θ при увеличении объема выборки N .

В следующей теореме изучается многомерная модель вида

$$V(n) = \Pi U(n) + \nu_n$$

при следующих предположениях

- 1) $K \times 1$ вектор предикторов $U(n)$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ измеримым;

2) существует непрерывная матричная функция $A(t)$, $t \in [0, 1]$ такая, что для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} N^{-1} \sum_{j=[t_1 N]}^{[t_2 N]} U(j) U'(j) = \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt,$$

где $\int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$ - положительно определенная матрица;

3) последовательность векторов $\{(U(n), \nu_n)\}$ удовлетворяет равномерному условию Крамера и ψ -перемешивания;

4) последовательность шумов ν_n является мартингал-разностью относительно потока $\mathcal{F}_n$

Теорема 2 (статистика $Y_N(\cdot)$)

1. Пусть выполнены предположения 1)-4). Тогда для любого порога $C > 0$ справедлива следующая оценка сверху для вероятности ошибки 1-го рода:

$$P_0 \left\{ \max_{[\alpha N] \leq n \leq [(1-\alpha)N]} \|Y_N(n)\| > C \right\} \leq \phi_0(C_1) \begin{cases} \exp\left(-\frac{TN C_1 \alpha}{4\phi_0(C_1)}\right), & C_1 > hT \\ \exp\left(-\frac{N C_1^2 \alpha}{4h\phi_0(C_1)}\right), & C_1 \leq hT, \end{cases}$$

где константы h , T и $\phi_0(C_1) \geq 1$ взяты из условий Крамера и ψ -перемешивания, а $C_1 = C/(1 + K)$.

2. Рассмотрим следующую матрицу размерности $K \times K$:

$$B(t) = \int_0^t A(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Положим $I = B(1)$. Для любого $0 < t \leq 1$ матрица $B(t)$ положительно определена.

Для каждого $0 \leq \theta \leq 1$ рассмотрим функцию

$$g(\theta) = \|B(\theta)(E - I^{-1}B(\theta))(\mathbf{a} - \mathbf{b})'\|,$$

где E - единичная матрица размерности $K \times K$.

Тогда $g(0) = g(1) = 0$. Рассмотрим точку θ^* глобального максимума функции $g(\theta)$ на отрезке $[0, 1]$. Выберем решающий порог $0 < C < g(\theta^*)$.

Пусть выполнены сформулированные выше условия 1)-4) и $\text{rank}(D) = M$, где $D = (E - I^{-1}B(\theta))(\mathbf{a} - \mathbf{b})'$. Обозначим $d_1 = (g(\theta^*) - C)/(1 + K)$. Тогда для вероятности ошибки 2-го рода справедлива следующая оценка сверху:

$$P_1 \left\{ \max_{[\alpha N] \leq n \leq [(1-\alpha)N]} \|Y_N(n)\| \leq C \right\} \leq \phi_0(d_1) \begin{cases} \exp(-\frac{TNd_1\alpha}{4\phi_0(d_1)}), & d_1 > hT \\ \exp(-\frac{Nd_1^2}{4h\phi_0(d_1)}), & d_1 \leq hT, \end{cases}$$

При гипотезе H_{1r} (структурный сдвиг по коэффициентам авторегрессии) отнормированная оценка момента структурного сдвига $\hat{n}/N$ сходится почти наверно к истинному параметру структурного сдвига θ при увеличении объема выборки N .

5. Имитационное моделирование

Целью имитационных экспериментов была проверка свойств предложенного теста и качества различения основных рассматриваемых гипотез - стационарности, структурного сдвига и единичного корня - для конечных объемов выборки.

1) В первой серии экспериментов изучались одномерные временные ряды со структурным сдвигом по среднему, а также с однократным единичным корнем.

При имитационном моделировании рассматривались следующие гипотезы и модели:

- H_0 - гипотеза стационарности наблюдений:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho x_{i-1} + \sigma v_i, \quad v_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ y_i &= x_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где N - объем выборки; $-1 < \rho < 1$, $\sigma > 0$; $\mathcal{N}(0, 1)$ - стандартное нормальное распределение;

- H_1 - гипотеза структурного сдвига по среднему:

$$y_i = x_i + hI(i \leq [\theta N]), \quad i = 1, \dots, N;$$

где $0 < \theta < 1$, $h > 0$;

- H_2 - гипотеза единичного корня:

$$y_i = y_{i-1} + \sigma v_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

При тестировании этих гипотез все параметры этих моделей, а именно, σ, ρ, h, θ - предполагались неизвестными. Предполагалось лишь, что $\theta \geq \theta_0 = 0.1$, $-0.99 \leq \rho \leq 0.9$.

Оценивание коэффициента авторегрессии ρ осуществлялось следующим образом. Вначале рассчитывались эмпирические оценки дисперсии и автоковариации 1-го порядка: для $n = [\theta N]$

$$r(0) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$r(1) = \frac{\sum_{i=2}^n (y_i - \bar{y})(y_{i-1} - \bar{y})}{n-2},$$

где $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i/n$, $0 < \theta_0 < \theta < 1$.

Тогда оценка коэффициента авторегрессии равна $\hat{\rho} = r(1)/r(0)$. Оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^n (y_i - \hat{\rho}y_{i-1})^2$.

При этих оценках рассчитывалось значение пороговой границы:

$$C(N) = 1.3581 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \frac{1 + \frac{|\hat{\rho}|}{4}}{1 - \hat{\rho}},$$

где значение 1.3581 соответствует доверительной вероятности 0.95. Во избежание недоразумений, подчеркнем, что этот выбор пороговой границы, зависящей от объема выборки N , обеспечивает постоянство вероятности ошибки 1-го рода на уровне 0.05.

В экспериментах рассчитывались оценки следующих характеристик качества тестирования:

на первом шаге метода:

- вероятность ошибки 1-го рода: $\hat{\alpha} = P_0\{T_N > C(N)\}$,
- вероятность ошибки 2-го рода: $\hat{\beta} = P_{12}\{T_N \leq C(N)\}$,

на втором шаге метода:

- вероятности перепутывания гипотез H_1 и H_2 : $\hat{\gamma} = P_1\{H_2\}$, $\hat{\delta} = P_2\{H_1\}$.

Оценки вероятностей $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ в Таблице 1 рассчитывались как средние в $k = 5000$ повторениях имитационных экспериментов.

В экспериментах были получены следующие результаты:

Таблица 1.

N		100	200	300	500	700	1000
$h = 1$	$\hat{\alpha}$	0.114	0.056	0.04	0.072	0.056	0.038
$\rho = 0.3$	$\hat{\beta}$	0.412	0.282	0.106	0.03	0	0
$\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}$	0.05	0.054	0.06	0.04	0.04	0.028
$\theta = 0.5$	$\hat{\delta}$	0.496	0.56	0.52	0.34	0.172	0.090
$h = 0.5$	$\hat{\alpha}$	0.082	0.062	0.052	0.040	0.038	0.048
$\rho = 0.3$	$\hat{\beta}$	0.64	0.23	0.082	0.026	0.006	0
$\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}$	0.05	0.052	0.058	0.044	0.03	0.024
$\theta = 0.5$	$\hat{\delta}$	0.50	0.566	0.568	0.354	0.168	0.072
$h = 0.5$	$\hat{\alpha}$	0.26	0.124	0.064	0.072	0.038	0.044
$\rho = 0.7$	$\hat{\beta}$	0.95	0.86	0.52	0.35	0.136	0.04
$\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}$	0.044	0.026	0.028	0.012	0.018	0.020
$\theta = 0.5$	$\hat{\delta}$	0.468	0.524	0.518	0.308	0.19	0.090
$h = 0.5$	$\hat{\alpha}$	0.046	0.038	0.058	0.032	0.026	0.030
$\rho = -0.7$	$\hat{\beta}$	0.37	0.29	0.088	0.026	0.004	0
$\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}$	0.024	0.032	0.058	0.024	0.024	0.032
$\theta = 0.5$	$\hat{\delta}$	0.494	0.528	0.502	0.346	0.176	0.084

Полученные результаты требуют нескольких комментариев. Во-первых, вероятность ошибки первого рода $\hat{\alpha}$ была выбрана на уровне 5 процентов, чем и объясняются стабильно низкие значения этого показателя в таблице. Вероятность ошибки 2-го рода $\hat{\beta}$, как видно из таблицы, быстро убывает при возрастании объема выборки. В таблице 1 приведены выборки данных с отношением сигнал/шум 1-2, что является довольно низким показателем. Но даже в этих сложных условиях тестирования удовлетворительное качество наблюдается при объемах выборки порядка 500 наблюдений. В практических задачах отношение сигнал/шум, как правило, гораздо выше (10-100), что позволяет достигать удовлетворительного качества тестирования при объемах выборки 100-150 наблюдений.

Во-вторых, качество тестирования сильно зависит от степени коррелированности наблюдений. Удовлетворительное качество тестирования при высоких значениях коэффициента автокорреляции (0.7-0.8) достигается при больших объемах выборки данных (800-1000).

На втором этапе метода происходит различение гипотез структурного сдвига и единичного корня. Из данных, приведенных в таблице, видно, что вероятность ошибки при тестировании гипотезы структурного сдвига ($\hat{\gamma}$), как правило, довольно мала (3-5 процентов), тогда как вероятность ошибки при тестировании гипотезы единичного корня несколько

выше, но также быстро убывает при возрастании объема выборки.

2) Во-второй серии экспериментов изучались выборки со структурным сдвигом по коэффициенту авторегрессии. Исследуемая модель имела вид:

$$y_i = \begin{cases} 2 + 0.3y_{i-1} + \nu_i, & 1 \leq i < [\theta N] \\ 2 + \rho y_{i-1} + \nu_i, & [\theta N] \leq i \leq N, \end{cases}$$

где $\nu_i \sim N(0, 1)$.

Полученные результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2.

N		100	200	300	400	500	700	1000
C		0.38	0.28	0.23	0.20	0.18	0.15	0.13
w_1		0.06	0.05	0.06	0.06	0.05	0.05	0.06
$\rho = 0.5$ $\theta = 0.3$	w_2	0.28	0.03	0	0	0	0	0
	$\hat{\theta}$	0.41	0.37	0.35	0.34	0.33	0.32	0.30
$\rho = 0.5$ $\theta = 0.7$	w_2	0.148	0.016	0	0	0	0	0
	$\hat{\theta}$	0.68	0.685	0.69	0.694	0.697	0.699	0.70
$\rho = 0.4$ $\theta = 0.3$	w_2	0.54	0.45	0.36	0.19	0.14	0.03	0.01
	$\hat{\theta}$	0.45	0.43	0.40	0.39	0.37	0.36	0.34
$\rho = 0.4$ $\theta = 0.7$	w_2	0.37	0.35	0.33	0.19	0.08	0.03	0.01
	$\hat{\theta}$	0.60	0.62	0.64	0.66	0.67	0.68	0.69

3) В третьей серии экспериментов исследовались структурные сдвиги в многомерных системах одновременных эконометрических уравнений.

Рассматривалась следующая система одновременных уравнений

$$\begin{aligned} y_i &= c_0 + c_1 y_{i-1} + c_2 z_{i-1} + c_3 x_i + \epsilon_i \\ z_i &= d_0 + d_1 y_i + d_2 x_i + \xi_i \\ x_i &= 0.5 x_{i-1} + \nu_i \\ \epsilon_i &= 0.3 \epsilon_{i-1} + \eta_i, \end{aligned}$$

где $\xi_i, \nu_i, \eta_i, i = 1, 2, \dots$ - независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины.

Здесь $(y_i, z_i)'$ - вектор эндогенных переменных, x_i - вектор экзогенных переменных, $(1, y_{i-1}, z_{i-1}, x_i)'$ - вектор преддетерминированных переменных рассматриваемой системы.

Динамика этой системы характеризуется следующим вектором коэффициентов: $\mathbf{u} = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ d_0 \ d_1 \ d_2]$. Исходная стационарная динамика определяется вектором коэффициентов $[0.1 \ 0.5 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6]$. Первый структурный сдвиг происходит в момент $\theta_1 = 0.3$. Вектор коэффициентов $\mathbf{u}$ становится равным $[0.1 \ 0.5 \ 0 \ 0.7 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6]$. Второй

структурный сдвиг происходит в момент $\theta_2 = 0.7$. Вектор $\mathbf{u}$ изменяется на $[0.1 \ 0.5 \ 0 \ 0.7 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.9]$.

В первой серии тестов оценивался порог C . С этой целью использовалась модель с начальным вектором коэффициентов $\mathbf{u}$ без структурных сдвигов. В 2000 независимых испытаниях рассчитывался максимум решающей статистики и строился вариационный ряд этого показателя. 95- и 99-процентные квантили приведены в таблице 3.

Таблица 3.

N	200	400	500	700	900	1000	1200	1500
$p = 0.95$	0.28	0.20	0.19	0.18	0.16	0.15	0.145	0.14
$p = 0.99$	0.36	0.33	0.28	0.24	0.23	0.21	0.19	0.17

95-процентные квантили принимались в качестве порога для соответствующего объема выборки.

В следующей серии экспериментов использовались выборки с множественными структурными сдвигами. Истинное количество структурных сдвигов равнялось $p = 2$, координаты моментов этих структурных сдвигов: $\theta_1 = 0.3$ и $\theta_2 = 0.7$. В таблице 4 приведены следующие показатели:

- w является оценкой вероятности $P\{\hat{p}_N \neq p\}$ в 2000 независимых испытаниях, где p_N - количество структурных сдвигов в выборке данных.
- Δ - среднеквадратичное отклонение оценок моментов структурных сдвигов от их истинных значений при $p_N = p$, т.е. $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}$.

Таблица 4.

N	200	400	500	700	900	1000	1200	1500
w	0.96	0.54	0.39	0.21	0.04	0.03	0.02	0.01
Δ	0.02	0.05	0.04	0.02	0.03	0.02	0.01	0.005

6. Практические приложения

1) Одномерные ряды

Предложенный метод был использован в задачах проверки стационарности временных рядов эконометрических наблюдений. В качестве этих временных рядов были выбраны важнейшие макроэкономические индикаторы по России за период 1994-2007 гг., измеренные с месячным интервалом.

Следует отметить, что преимущества предложенного метода проявляются начиная с объемов выборки 100-150 наблюдений. Поэтому попытки использования данного метода для тестирования стационарности наблюдений при объемах выборки 20-50 точек будут в большинстве случаев давать некорректные результаты.

В экспериментах были использованы следующие динамические ряды в диапазоне 1994.1-2007.9:

CPI - месячный индекс инфляции на потребительском рынке (в процентах);

M2 - денежный агрегат М2 (трлн.руб);

E - официальный обменный курс доллара (руб./долл.);

PEL - месячный индекс тарифов на электроэнергию для конечных потребителей (в процентах);

pi - темп инфляции $pi = CPI/100 - 1$;

eps - темп изменения курса доллара $eps = E/E(-1) - 1$;

mi - темп изменения денежного агрегата М2 $mi = M2/M2(-1) - 1$;

piel - темп изменения тарифов на электроэнергию для конечных потребителей $piel = PEL/100 - 1$;

pcum - уровень инфляции (базовый индекс) $pcum = pcum(-1) * CPI/100$;

pcel - уровень тарифов на электроэнергию для конечных потребителей $pcel = pcel(-1) * PEL/100$;

lpcum - логарифм уровня инфляции $lpcum = log(pcum)$;

lpcel - логарифм уровня тарифов на электроэнергию $lpcel = log(pcel)$;

lm2 - логарифм денежного агрегата М2 $lm2 = log(M2)$;

lE - логарифм обменного курса доллара $lE = log(E)$;

Dlpcum - приращение логарифма уровня цен $Dlpcum = lpcum - lpcum(-1)$;

Dlpcel - приращение логарифма уровня тарифов на электроэнергию $Dlpcel = lpcel - lpcel(-1)$;

DlE - приращение логарифма обменного курса доллара $DlE = lE - lE(-1)$.

Проверка этих динамических рядов на стационарность с использованием расширенного теста Дики-Фуллера (ADF) с тремя лагами и без включения константы и тренда дала следующие результаты:

- ряды *CPI*, *M2*, *E*, *PEL*, *pcum*, *pcel*, *lpcum*, *lpcel*, *lm2*, *lE* имеют порядок нестационарности $I(1)$ с доверительным уровнем 95 процентов;

- ряды *pi*, *eps*, *mi*, *piel*, *Dlpcum*, *Dlpcel*, *DlE* стационарны с доверительным уровнем 95 процентов.

Следует отметить, что проверка на наличие структурного сдвига в стандартных эконометрических пакетах для отдельных рядов, как правило, не проводится.

Исследование данных динамических рядов на стационарность с использованием предложенного в статье метода дало следующие результаты:

- ряды $pi, eps, tu, piel, Dlpsum, Dlpcel, DLE$ являются стационарными при уровне ошибки 5 процентов. Таким образом, получено полное совпадение результатов с тестом ADF;

- ряды $CPI, M2, E, PEL, psum, pcel, lpsum, lpcel, lm2, lE$ являются нестационарными при уровне ошибки 5 процентов. Из этих рядов только $psum, lpsum$ классифицируются по типу структурного сдвига (в точке 1998.9); для остальных рядов принимается гипотеза наличия единичного корня.

2) Построение коинтеграционных зависимостей и моделей коррекции остатками

Исследование факторов, определяющих динамику реального ВВП в России, представляет собой существенный экономический интерес. Из аналитической модели следует, что к фундаментальным факторам, определяющим долгосрочные и среднесрочные тренды в динамике реального ВВП, следует отнести:

- * Мировые и экспортные цены на российскую нефть
- * Индекс инвестиций в основной капитал
- * Факторы налоговой политики
- * Факторы тарифной политики в отраслях естественных монополий

Помимо вышеперечисленных, можно назвать множество других макроэкономических факторов, также оказывающих существенное влияние на динамику реального ВВП, в частности, реальный обменный курс рубля. Нетрудно понять, однако, что эти дополнительные факторы являются производными и зависимыми от отмеченных факторов мировой конъюнктуры, инвестиционной, налоговой и тарифной политики. В частности, динамика реального обменного курса рубля тесно связана с динамикой мировых цен на российскую нефть. Поэтому с целью исключения эффекта мультиколлинеарности при эконометрическом моделировании в спецификацию модели были включены только следующие факторы:

$woil$ - контрактная экспортная цена на российскую нефть;
 $gmon$ – дефлированный (на базисный индекс потребительских цен) индекс цен на электроэнергию, газ и воду;
 Inv - индекс инвестиций в основной капитал;
 $s2001p2$ - дамми-переменная, отражающая долгосрочный эффект изменений налоговой политики во 2-м кв. 2001 г.

С использованием квартальных данных 1995(1)-2007(4) получена следующая коинтеграционная зависимость для индекса реального ВВП (GDP):

$$\log(\text{GDP}) = 2.715 + 0.1902 \log(\text{woil}) - 0.0813 \log(\text{rmon}) + 0.2054 \log(\text{Inv}(-4)) + 0.1159 s_{2001p2},$$

Показатели качества этой зависимости: $R^2=0.93$, $DW=1.90$.

Проверка ряда регрессионных остатков этой зависимости на стационарность осуществлялась двумя способами:

- с использованием статистики $Z_N(\cdot)$, предложенной в докладе;
- с использованием теста Дэвидсона-МакКиннона с модифицированным порогом.

Оба этих теста подтвердили гипотезу стационарности ряда регрессионных остатков ($I(0)$). При этом для статистики $Z_N(\cdot)$ были получены следующие результаты: параметры $\rho = 0.0375$, $\sigma = 0.0646$, пороговая граница $C = 0.0132$, максимум модуля статистики $z_{max} = 0.0072$. График модуля статистики $Z_N(\cdot)$ приведен на следующем рисунке.

Таким образом, долгосрочный коэффициент эластичности индекса реального ВВП по фактору экспортных цен на нефть составляет +0.19; по фактору дефлированных тарифов на электроэнергию: -0.08; по фактору реальных инвестиций в основной капитал: +0.2; по фактору налоговой политики: 0.11.

Для оценки влияния реального эффективного курса рубля на темпы роста ВВП коинтеграционная зависимость была расширена до модели коррекции регрессионных остатков. При этом в спецификацию эконометрической модели следует включить реальный эффективный курс рубля к иностранным валютам, который более точно отражает макроэкономический эффект данного фактора. Далее в расчетах использован индекс реального эффективного курса российского рубля к иностранным валютам (1995 г. = 100 процентов) - rer. Модель коррекции регрессионными остатками, полученная на интервале данных 1995(3)-2007(4), имеет вид:

$$D\log(\text{GDP}) = -0.053 + 0.547 D\log(\text{GDP}(-2)) - 0.201 R\log(\text{GDP}(-1)) - 0.1324 D\log(\text{rer}(-1)) - 0.1328 \text{Seas} + 0.1327 \text{Seas}(-1) + 0.246 \text{Seas}(-2),$$

Показатели качества этой модели: $R^2=0.94$, критерий Бройша-Годфри на автокорреляцию остатков высокого порядка: $AR\ 1-4F(4,39)=2.48$ – подтверждают ее приемлемое качество. Из этих результатов следует, что рост реального эффективного курса рубля влечет за собой снижение темпов роста ВВП: эластичность реального ВВП по данному фактору составляет величину -0.132.

Модель коррекции остатками была протестирована на наличие структурных сдвигов с использованием метода, предложенного в докладе. При этом в формуле для расчета решающего порога:

$$C(N) = \frac{\hat{\sigma}(\max_j EU_j^2)^{1/2}}{\sqrt{N}} \lambda,$$

- оценка $\hat{\sigma} = 0.0066$;

- оценка $(\max_{1 \leq j \leq k} \sum_1^N U^2(i, j)/N)^{1/2} = 1.0$

- коэффициент калибровки $\lambda = 1.6$.

Полученное значение порога $C = 0.0017$.

Рассчитанное значение максимума решающей статистики: $\max_{[\alpha N] \leq n \leq [(1-\alpha)N]} |Y_N(n)| = 0.004$ выше решающего порога. В модели присутствуют структурные сдвиги. Из графика решающей статистики видно, что существует "плато" максимумов статистики на отрезке [13, 27], который соответствует началу финансового кризиса в России 1998 года (точка 13) и принятию Налогового кодекса в 2001-2002 годах (точка 25). В этот период происходила структурная перестройка всей модели российской экономики, что отразилось на динамике ВВП.

Литература

Banerjee, A., Lumsdaine, R.L., Stock, J.H. (1992) Recursive and sequential tests of the unit root and trend-break hypothesis: theory and international evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271-287.

Brodsky, B., Darkhovsky, B. (2000) *Non-parametric Statistical Diagnosis: Problems and Methods*, KLUWER, Dordrecht.

Chow G.C. (1960) Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. *Econometrica*, 28, 591-605.

Christiano, L.J. (1992) Searching for breaks in GDP. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 237-250

Dickey, D.A., Fuller, W.A. (1979) Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.

Dickey, D.A., Fuller, W.A. (1981) Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica*, 49, 1057-1072.

Kim, D., Perron, P. (2005) Unit root tests with a consistent break fraction estimator. Department of Economics, Boston University.

Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y. (1992) Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure

are we that economic time series have a unit root. *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

MacKinnon, J.B. (1996) Numerical distribution functions for unit roots and cointegration tests. *J. of Applied Econometrics*, 11, 601-618.

Montanes, A., Reyes, M. (1999) The asymptotic behavior of the Dickey-Fuller tests under the crash hypothesis. *Statistics and Probability Letters*, 48, 401-409.

Montanes, A., Reyes, M. (2000) Structural breaks, unit roots and methods for removing the autocorrelation pattern. *Statistics and Probability Letters*, 48, 401-409.

Nelson, C.R., Plosser, C.I. (1982) Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.

Peligrad M. (1992) On the central limit theorem for weakly dependent sequences with a decomposed strong mixing coefficient. *Stochastic Processes and their Applications*, v.42, pp.181-193.

Perron, P. (1989) The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57, 1361-1401.

Perron, P. (1994) Trend, unit root, and structural change in macroeconomic time series. In: *Cointegration for the Applied Economist*, Rao, B.B. (ed.), Basingstoke: Macmillan Press, 113-146.

Perron (2005) Dealing with structural breaks. *Palgrave Handbook of Econometrics*, vol.1, *Econometric Theory*.

Perron, P., Vogelsang T. (1992) Nonstationarity and level shifts with an application to purchasing power parity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 301-320.

Perron, P. (1997) Further evidence from breaking trend functions in macroeconomic variables. *Journal of Econometrics*, 80, 55-385.

Perron, P., Yabu, T. (2005) Testing for shifts in trend with an integrated or stationary noise component. Department of Economics, Boston University.

Phillips, P.C.B., Perron P. (1988) Testing for a unit root in a time series regression. *Biometrika*, 75, 335-346.

Ploberger W., Kramer W. (1992) The CUSUM test with OLS residuals. *Econometrica*, 60, 271-285.

Rappoport, P., Reichlin, L. (1989) Segmented trends and non-stationary time series. *Economic Journal*, 99, 168-177.

Zivot, E., & Andrews, D. (1992). Further evidence on the Great crash, the oil price shock and the Unit root hypothesis. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251-287.