Ретроспективный анализ структурных сдвигов в эконометрических зависимостях

Бродский Б.Е.

1. Введение

Период 1970-2000 годов охарактеризовался существенными изменениями в методологии моделирования и прогноза экономических процессов. Вплоть до конца 1960-х годов в большинстве работ по макроэкономическому моделированию, как на Западе, так и в СССР, делался упор на построение всеобъемлющих макроописаний: моделей общего равновесия и межотраслевых балансов, включавших 200-300 уравнений, преимущественно балансовых и регрессионных, коэффициенты которых оценивались на относительно коротких стационарных периодах функционирования экономической системы. Актуальный пример: глобальный проект "народнохозяйственного прогнозирования", реализованный в ЦЭМИ в 1960-1980 годах на основе методологии межотраслевых балансов. Распад социалистической системы в начале 1990-х годов повлек за собой крушение этого проекта. Причина - резкий структурный "шок", вызванный рыночной трансформацией. Нарушение стационарных структурных "пропорций хозяйства"привело к тому, что старая макромодель оказалась неадекватной новым экономическим реалиям.

Подобную же эволюцию претерпела методология "глобального балансового моделирования"на Западе. Нефтяной кризис 1970-х годов явился серьезным структурным "шоком"для рыночных экономик, повлекшим за собой резкое изменение функциональной структуры и параметров эконометрических макромоделей. Настройка этих макромоделей на новый экономический режим оказалась чрезвычайно сложной и трудоемкой процедурой ввиду огромного количества уравнений, коэффициенты которых одновременно оценивались. В этот период Р.Лукас выступил со знаменитой критикой, направленной против попыток построения всеобъемлющих макроописаний экономических систем и мотивированной наличием структурных "шоков", резко изменяющих параметры этих систем в непредвиденные моменты. После критики Лукаса важнейшие макроэкономические зависимости (кривая Филлипса, модель агрегированного предложения и др.) дополняются слагаемыми, описывающими структурные сдвиги. Проблемы, которые возникли при этом, заключались в том, что сами моменты структурных сдвигов были априори неизвестны и поэтому применяемые методы оценивания были полуэвристическими. С другой стороны, возникшее понимание важности проблемы анализа структурных сдвигов в эконометрическом моделировании стимулировало развитие новых методов статистического анализа данных в эконометрических исследованиях.

В 1980-е годы появились две альтернативные методологические программы, целью которых был анализ различных форм нестационарности наблюдений в эконометрических моделях. Первая программа, выдвинутая Нельсоном и Плоссером (Nelson, Plosser,1982), подчеркивала значимость анализа стохастических трендов в динамических рядах наблюдений для построения адекватных эконометрических моделей. Эта программа, однако, была подвергнута критике Перроном (Perron, 1989), который показал, что для многих динамических рядов гипотеза о наличии стохастического тренда может быть отвергнута, если допустить возможность структурного сдвига в неизвестной детерминированной функции тренда. Реальной экономической задачей, которую Перрон пытался решить с помощью метода обнаружения структурных сдвигов, была интерпретация макроэкономических данных о кризисе 1929 года - крахе Нью-Йоркской фондовой биржи и последовавшей за ним Великой Депрессии, а также о нефтяном "шоке"1973 года. Одна из возможных интерпретаций этих кризисов состоит в том, что они привели к одномоментным сдвигам по среднему наблюдаемых макроэкономических переменных: объема ВВП, промышленного производства и др. Другая интерпретация состоит в том, что ввиду нестационарности наблюдаемых трендов макропеременных эти кризисы порождают долгосрочный спад производства и инвестиций.

Ключевым предположением Перрона была исходная гипотеза об экзогенности момента структурного сдвига. В последующих работах эта гипотеза была подвергнута критике: Кристиано (Cristiano, 1992), Перрон и Фогелзанг (Perron, Fogelsang, 1992), Зивот и Эндрюс (Zivot, Andrews, 1992) рассматривали эконометрические регрессионные модели с эндогенными структурными сдвигами, т.е. ситуации, в которых моменты структурных сдвигов не задаются извне как экзогенные параметры, а определяются по самой выборке данных. В современных работах по анализу структурных сдвигов в эконометрических моделях (см., например, Bai, Perron (1998), Bai, Lumsdaine, Stock (1998)) рассматриваются весьма сложные задачи, в которых требуется обнаружить и оценить структурные сдвиги в моделях с детерминированными и стохастическими регрессорами, в коинтеграционных моделях и др. Все эти работы объединены общим методологическим подходом: вначале по всевозможным разбиениям выборки на подвыборки строятся регрессионные оценки коэффициентов исследуемой зависимости для каждой из подвыборок, а затем путем прямого перебора ищется то разбиение на подвыборки, для которого остаточная сумма квадратов регрессионных моделей наименьшая. Границы этого разбиения и объявляются искомыми оценками моментов структурных сдвигов. Недостатки этого подхода проявляются в большом количестве ложных структурных сдвигов, низкой точности получаемых оценок моментов структурных сдвигов, большом количестве и времени вычислений.

В данной работе предложен новый метод ретроспективного анализа структурных сдвигов в регрессионных моделях. Этот метод позволяет обнаруживать множественные структурные сдвиги в полученной выборке данных и строить состоятельные оценки моментов структурных сдвигов. Метод не использует идею перебора и построения регрессий по всем подвыборкам, что позволяет существенно сократить время вычислений и уменьшить количество "ложных тревог". Результаты работы могут быть использованы при построении моделей многофакторной регрессии на больших выборках данных.

2. Постановка задачи

Для того, чтобы прояснить основные идеи предлагаемого метода, целесообразно начать с краткого обзора основных постановок и методов решения задач обнаружения структурных сдвигов в эконометрических моделях. Исторически первые постановки задач обнаружения структурных сдвигов в регрессионных моделях были рассмотрены в работах Куандта (Quandt, 1958, 1960). Он рассмотрел следующую модель наблюдений: $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$:

$$Y_j = (\beta_0 + \theta_0) + (\beta_1 + \theta_1)X_j + \sigma Z_j,$$

где $Z_j, j = 1, \ldots, n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $EZ_j = 0$, $EZ_j^2 = 1$, а вектор $(\theta_0, \theta_1) = (0, 0)$ при $j \leq \tau$ и $(\theta_0, \theta_1) \neq (0, 0)$ при $j > \tau$.

С использованием эконометрических приложений Куандт предложил метод оценивания момента разладки τ по наблюдениям $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$.

В дальнейшем развитии методов обнаружения структурных сдвигов в регрессионных моделях существенную роль сыграла работа Брауна, Дурбина и Эванса (1975). Они предложили методов оценивания, использующий накопленные суммы регрессионных остатков (CUSUM). Эта идея развивалась далее в работах Зигмунда с соавторами (1987, 1989). Другой подход, основанный на методе максимума правдоподобия, был предложен в работах Maronna, Yohay (1978), Worsley (1986) для гауссовских наблюдений.

Для задачи ретроспективного обнаружения структурных сдвигов Gombay, Horvath (1994) рассматривали предельные распределения статистик, использующих кумулятивные суммы регрессионных остатков. В монографии Csorgo, Horvath (1997) были подытожены многочисленные результаты, полученные в этом направлении, включая предельные распределения статистик отношения правдоподобия, статистик, использующих обычные и рекурсивные регрессионные остатки.

Помимо задачи ретроспективного обнаружения, существенную практическую значимость имеют задачи статистического оценивания моментов структурных сдвигов в полученной выборке. Этой теме посвящены работы Дарховского (1995), Huskova (1996), Horvath, Huskova, Serbinowska (1997). В последних двух работах рассматривались свойства оценки максимального правдоподобия момента разладки в выборке для ситуации контигуальных альтернатив. Изучено предельное распределение этой оценки при объеме выборки, стремящемся к бесконечности, а также получены результаты о слабой и сильной сходимости оценки к истинному моменту разладки при различных предположениях о наблюдениях. Работа Дарховского (1995) развивает непараметрический подход к задачам обнаружения разладок случайных процессов и полей, разработанный в монографии Бродского и Дарховского (1993). Изучаются статистические свойства оценок момента разладки в моделях функциональной регрессии, основанных на идее статистики Колмогорова-Смирнова, без предположения контигуальности альтернатив. Различные обобщения этих оценок содержатся в монографии Бродского и Дарховского (2000).

Значительное число предложенных методов обнаружения структурных сдвигов в регрессионных и коинтеграционных моделях придает актуальность задаче их сравнительного анализа, а также задаче поиска оптимальных и асимптотически оптимальных методов с наилучшими в некотором смысле свойствами.

Рассмотрим общую постановку задачи обнаружения структурных сдвигов в эконометрических зависимостях регрессионного и коинтеграционного типа. Пусть модель наблюдений имеет следующий вид:

$$y_n = c_1(n)x_{1n} + \cdots + c_k(n)x_{kn} + \xi_n, \quad n = 1, \dots, N, \tag{1}$$

где ξ_n - случайная последовательность "шумов"в зависимой переменной y_n, $\mathbf{c}(n) = (c_1(n), \dots, c_k(n))^*$ - вектор неизвестных коэффициентов в модели (1), описывающийся кусочно-постоянной функцией:

$$\mathbf{c}(n) = \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{a}_i(n)\, I([\theta_{i-1}N] < n \leq [\theta_i N]),$$

где θ_i - неизвестные параметры структурных сдвигов в модели (1), такие, что $0 \equiv \theta_0 < \theta_1 < \dots \theta_m < \theta_{m+1} \equiv 1$; вектора $\mathbf{a}_i(n) \neq \mathbf{a}_{i+1}(n)$, $i = 1, \dots, m$; $X_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})^*$ - случайный вектор предикторов в модели (1), измеримый относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$, представляющей собой всю доступную информацию к моменту $n-1$.

Практически важные приложения рассматриваемой модели включают модели авторегрессии

$$y_n = c_0 + c_1 y_{n-1} + \cdots + c_k y_{n-k} + \xi_n,$$

авторегрессии-скользящего среднего

$$y_n = c_1 y_{n-1} + \cdots + c_k y_{n-k} + d_1 u_{n-\Delta} + \cdots + d_h u_{n-h-\Delta+1} + \xi_n,$$

где Δ - запаздывание,u_n - вход, y_n - выход некоторой системы в момент n; а также многофакторные регрессионные и коинтеграционные модели вида:

$$y_n = c_1 y_{n-1} + \cdots + c_k y_{n-k} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l_i} d_{ij} x_i(n-j) + \xi_n,$$

где $m, k, l_i \geq 1$, а предикторы x_i, в свою очередь, могут порождаться стационарными процессами авторегрессии-скользящего среднего, процессами с "единичным корнем"и даже неравновесными "эксплозивными"зависимостями вида:

$$x_i(n) = \phi_{1i} x_i(n-1) + \cdots + \phi_{1s} x_i(n-s) + \zeta_{in},$$

где ξ_i, ζ_{in} - независимые случайные процессы.

Задача состоит в оценке параметров $\theta_i, i = 1, \dots, m$ структурных сдвигов в модели (1) по наблюдениям $(y_n, x_{1n}, \dots, x_{kn}), n = 1, \dots, N$. Подчеркнем, что в рассматриваемой постановке задачи коэффициенты $\mathbf{c}(n) = (c_1(n), \dots, c_k(n))^*$ предполагаются неизвестными. Точные предположения о наблюдениях $(y_n, x_{1n}, \dots, x_{kn})$, $n = 1, \dots, N$, будут сформулированы далее.

3. Основные результаты

Вначале остановимся на характере полученных далее результатов. На современном уровне развития методов обнаружения и оценивания структурных сдвигов в эконометрических моделях особую актуальность приобретают задачи сравнительного анализа качества различных методов и построения асимптотически оптимальных методов. Далее предпринята попытка решения этих задач на основе метода априорных неравенств. Априорные (a priori, т.е. до конкретного метода) неравенства, доказанные далее, представляют собой общие теоретико-информационные оценки основной характеристики качества производного метода - вероятности ошибки оценивания параметра структурного сдвига. Метод оценивания структурных сдвигов, для которого достигается априорная нижняя граница в этих неравенствах (асимптотически, т.е при стремлении объема выборки к бесконечности), естественно называть асимптотически оптимальным.

3.1. Априорные неравенства

В этом параграфе будет рассматриваться наиболее простая ситуация обнаружения единичного структурного сдвига в последовательности независимых наблюдений. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\theta)$ рассмотрим последовательность независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_N$ со следующей плотностью распределения

$$f(x_n) = \begin{cases} f_0(x_n,\, n/N) & 1 \le n \le [\theta N], \\ f_1(x_n,\, n/N) & [\theta N] < n \le N, \end{cases} \tag{2}$$

где $1 > \theta > 0$ - неизвестный параметр структурного сдвига ($[a]$ здесь и далее обозначает целую часть числа a; $I(A)$ - индикатор множества A). Предполагается, что $f_0(x,t) \neq f_1(x,t)$ в некоторой окрестности $t \in T(\theta)$ параметра структурного сдвига.

Предположим, что функции $J_0(t) = \mathbf{E}_0 \ln \dfrac{f_0(x,t)}{f_1(x,t)}$, $J_1(t) = \mathbf{E}_1 \ln \dfrac{f_1(x,t)}{f_0(x,t)}$ существуют и непрерывны.

Рассмотрим класс $\mathcal{M}_N$ всех оценок $\hat{\theta}_N$ параметра θ, построенных по выборке

$X^N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Справедлива следующая

Теорема 1. Для каждого $0 < \theta < 1$ и $0 < \epsilon < \theta \wedge (1-\theta)$:

$$\liminf_N N^{-1} \ln \inf_{\hat{\theta}_N \in \mathcal{M}_N} \mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_N - \theta| > \epsilon\} \geq -\min\left(\int\limits_\theta^{\theta+\epsilon} J_0(t)dt, \int\limits_{\theta-\epsilon}^{\theta} J_1(t)dt \right).$$

Следствия

Рассмотрим некоторые частные случаи модели (2).

1. Излом функции тренда в математическом ожидании $\phi(t)$ гауссовских наблюдений:

$$\begin{aligned} f_0(x,t) &= h(x)\exp\left(\phi_0(t)x - \phi_0^2(t)/2\right), \quad t \leq \theta \\ f_1(x,t) &= h(x)\exp\left(\phi_1(t)x - \phi_1^2(t)/2\right), \quad t > \theta, \end{aligned}$$

где $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$, $\phi_0(\cdot) \neq \phi_1(\cdot)$.

В этом случае из Теоремы 1 получаем следующую нижнюю границу для веростности ошибки оценивания параметра структурного сдвига:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_N - \theta| &> \epsilon\} \geq \\ &(1-o(1))\exp\left(-\frac{N}{2}\min\Big(\int\limits_\theta^{\theta+\epsilon}(\phi_0(t)-\phi_1(t))^2dt, \int\limits_{\theta-\epsilon}^{\theta}(\phi_0(t)-\phi_1(t))^2\,dt\Big)\right). \end{aligned}$$

2. Линейная регрессия с детерминированными предикторами и гауссовским ошибками

$$y_n = c_1(n)x_{1n} + \cdots + c_k(n)x_{kn} + \xi_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

где $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых гауссовских с.в. с нулевым средним $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\mathbf{c}(n) \stackrel{\text{def}}{=} (c_1(n), \ldots, c_k(n))^* = \mathbf{a}I(n \leq [\theta N]) + \mathbf{b}I(n > [\theta N])$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, и существуют функции $f_i(\cdot) \in C[0,1]$, $i = 1, \ldots, k$ такие, что $x_{in} = f_i(n/N)$, $n = 1, \ldots, N$.

В этом случае из Теоремы 1 получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_N &- \theta| > \epsilon\} \geq \\ &(1-o(1))\exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2}\min\Big(\int\limits_\theta^{\theta+\epsilon}(\sum_{i=1}^k f_i(t)(a_i-b_i))^2dt, \int\limits_{\theta-\epsilon}^{\theta}(\sum_{i=1}^k f_i(t)(a_i-b_i))^2dt\Big)\right). \end{aligned}$$

3. Линейная стохастическая регрессионная модель с независимыми гауссовским предикторами

Рассмотрим модель (2), в которой $\xi_n \equiv 0$, вектора $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})^*$ случайны и независимы и существуют непрерывные функции $f_i(\cdot), \sigma_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, k$ такие, что x_{in} являются гауссовскими с.в. $x_{in} \sim \mathcal{N}\left(f_i(n/N), \sigma_i^2(n/N)\right)$, $n = 1, \ldots, N$, компоненты x_{in}, x_{jn} независимы при $i \neq j$ и $\mathbf{c}(n) = (c_1(n), \ldots, c_k(n))^* = \mathbf{a}I(n \leq [\theta N]) + \mathbf{b}I(n > [\theta N])$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Тогда из Теоремы 1 получим:

$$\mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_N - \theta| > \epsilon\} \geq (1 - o(1)) \exp\left(-\frac{N}{2} \min\Big(\int\limits_{\theta}^{\theta+\epsilon} J_0(t)dt, \int\limits_{\theta-\epsilon}^{\theta} J_1(t)dt\Big)\right),$$

где

$$J_0(t) = \left(\frac{\phi_0(t)}{\Delta_0(t)} - \frac{\phi_1(t)}{\Delta_1(t)}\right)^2 + 2\frac{\phi_0(t)}{\Delta_0(t)}\frac{\phi_1(t)}{\Delta_1(t)}\left(1 - \frac{\Delta_0(t)}{\Delta_1(t)}\right) +$$
$$2\ln\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_0(t)} + \left(1 + \frac{\phi_0^2(t)}{\Delta_0^2(t)}\right)\left(\frac{\Delta_0(t)}{\Delta_1(t)} - 1\right),$$

и $\phi_0(t) = a_1 f_1(t) + \cdots + a_k f_k(t)$, $\Delta_0^2(t) = a_1^2\sigma_1^2(t) + \cdots + a_k^2\sigma_k^2(t)$, с аналогичными выражениями для $\phi_1(t), \Delta_1(t), J_1(t)$.

3.2. Асимптотически оптимальные методы

В предыдущем разделе были приведены априорные границы снизу для вероятности ошибки оценивания в задаче об однократном структурном сдвиге. Методы оценивания моментов структурных сдвигов, для которых достигается порядок сходимости, фигурирующий в априорной нижней границе, естественно назвать асимптотически оптимальными. Далее будут приведены новые методы обнаружения структурных сдвигов в регрессионных и коинтеграционных моделях, для которых в асимптотике (при стремлении объема выборки к бесконечности) достигается оптимальный порядок сходимости оценки параметра структурного сдвига к его истинному значению.

Сформулируем предположения о наблюдениях, при которых будет рассматриваться задача. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ - σ-алгебры, содержащиеся в $\mathfrak{F}$. Обозначим через $L_p(\mathcal{H})$ множество L_p-интегрируемых с.в., измеримых относительно некоторой σ-алгебры $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Определим следующую меру зависимости между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$:

$$\psi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \sup_{A \in \mathcal{H}_1, B \in \mathcal{H}_2, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0} \Big|\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1\Big|$$

Пусть $(X_i, i \geq 1)$ - последовательность случайных векторов на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Обозначим через $\mathfrak{F}_s^t = \sigma\{X_i : s \leq i \leq t\}, 1 \leq s \leq t < \infty$ минимальную σ-алгебру, порожденную случайными векторами $X_i, s \leq i \leq t$. Положим

$$\psi(n) = \sup_{t \geq 1} \psi(\mathfrak{F}_1^t, \mathfrak{F}_{t+n}^\infty)$$

Будем говорить, что оследовательность $(X_i; i \geq 1)$ удовлетворяет условию *ψ-перемешивания*, если функция $\psi(n)$ (которая также называется коэффициентом *ψ-перемешивания*)сходится к нулю при n стремящемся к бесконечности .

Будем говорить также, что для последовательности $\{\zeta(n)\}$ случайных векторов $\zeta(n) \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_1(n), \ldots, \zeta_k(n))$ выполнено условие Крамера, если существует константа $L > 0$ такая, что

$$\sup_n \mathbf{E} \exp\left(t\zeta_i(n)\zeta_j(n)\right) < \infty$$

для любых $i, j = 1, \ldots, k$ и $|t| < L$.

3.2.1. Детерминированный регрессионный план

Рассмотрим линейную регрессионную модель (3), в которой $\{\xi_i\}$ - последовательность центрированных и, в общем случае, зависимых величин. Как и выше, предположим, что существуют функции $f_i(\cdot) \in C[0,1]$, $i = 1, \ldots, k$, такие, что $x_{in} = f_i(n/N), n = 1, \ldots, N$.

Обозначим для каждого $0 \leq t \leq 1 :\ F(t) = (f_1(t), \ldots, f_k(t))^*$.

Сформулируем предположения о функциях $\{f_i\}$ в этой задаче:

a) функции $\{f_i\}$ почти всюду (относительно Лебеговой меры) непрерывны и ограничены на $[0,1]$;

b) для каждого $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ матрица

$$\int_{t_1}^{t_2} F(s)F^*(s)ds$$

положительно определена.

Положим

$$\int_0^1 F(s)F^*(s)ds = R$$

Согласно предположениям, матрица R симметрична и положительно определена. Поэтому существует матрица $R^{-1/2}$.

Определим для каждого $t \in [0,1]$

$$A_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_t^1 F(s)F^*(s)ds,\ B_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^t F(s)F^*(s)ds$$
$$P_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^{-1/2}A_tR^{-1/2},\ Q_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^{-1/2}B_tR^{-1/2},$$

Согласно определениям, матрицы $P_t,\ Q_t$ положительно определены для каждого $0 < t < 1$ и

$$P_t + Q_t \equiv \mathbb{E} \tag{4}$$

гдн $\mathbb{E}$ - единичная матрица в $\mathbb{R}^k$.

Положим

$$\tilde{\mathbf{a}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^{1/2}\mathbf{a},\ \tilde{\mathbf{b}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^{1/2}\mathbf{b},$$

Тогда рассматриваемая регрессионная модель может быть записана следующим образом:

$$y_i = F^*(i/N)R^{-1/2}\tilde{\mathbf{c}}(i) + \xi_i \tag{5}$$

где $\tilde{\mathbf{c}}(i) = \tilde{\mathbf{a}}I(i \le [\theta N]) + \tilde{\mathbf{b}}I(i > [\theta N])$.

Положим

$$R_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(i/N)F^*(i/N).$$

Согласно предположениям, $R_N \to R$ при $N \to \infty$.

Определим вектор

$$z(n_1,n_2) = R_N^{-1/2}\sum_{i=n_1}^{n_2} F(i/N)y_i,$$

и матрицу

$$\mathcal{P}_{n_1}^{n_2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R_N^{-1/2}\left\{\sum_{k=n_1}^{n_2} F(k/N)F^*(k/N)\right\}R_N^{-1/2},\ 1 \le n_1 < n_2 \le N$$

Для оценивания структурного сдвига в модели (5) используется следующая статистика:

$$Y_N(n) = N^{-1}\left((\mathcal{P}_{n+1}^N)^{1/2}(\mathcal{P}_1^n)^{-1/2}z(1,n) - (\mathcal{P}_1^n)^{1/2}(\mathcal{P}_{n+1}^N)^{-1/2}z(n+1,N)\right) \tag{6}$$

Произвольная точка $\hat{n}$ множества $arg \max\limits_{1 \le n \le N} \|Y_N(n)\|$ ($\|\cdot\|$ здесь и далее обозначает Евклидову норму) принимается в качестве оценки момент структурного сдвига. Определим также величину $\hat{\theta}_N = \hat{n}/N$ в качестве оценки параметра структурного сдвига θ.

В следующей теореме устанавливается сильная состоятельность оценки $\hat{\theta}_N$.

Пусть $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} [\beta, \gamma]$, $0 < \beta < \gamma < 1$, β и γ - известные числа.

Теорема 2.

Предположим, что последовательность $\xi_i, i = 1, \ldots, N$ в (5) удовлетворяет условиям Крамера и ψ-перемешивания и выполнены предположения a), b), сформулированные выше. Тогда оценка $\hat{\theta}_N$ сходится к θ $\mathbf{P}_\theta$-почти наверно и для каждого $\delta > 0$ существуют константы $N(\delta), A(\delta) > 0, B(\delta) > 0$ такие, что для каждого $N > N(\delta)$ выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_N - \theta| > \delta\} \leq A(\delta) \exp(-B(\delta)N).$$

Отметим, что константы $A(\delta), B(\delta)$ в этой теореме не зависят от N. Эти константы могут быть точно оценены для задачи обнаружения разладки по математическому ожиданию последовательности независимых гауссовских величин (см. Brodsky, Darkhovsky (2000)). Сопоставляя результаты теорем 1 и 2, можно сделать вывод, что предложенная оценка $\hat{\theta}_N$ логарифмически оптимальна по порядку.

Стохастический регрессионный план

В этом параграфе предполагается, что предикторы x_{ji} в модели (2) случайны. На вероятностном простанстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\theta)$ рассмотрим возрастающую последовательность σ-подалгебр $\{\mathcal{F}_n\}$, $n = 1, \ldots, n$ алгебры $\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}_n$ интерпретируется как вся доступная информация к моменту n.

Положим $\mathbf{x}(n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1(n), \ldots, x_k(n))^*$.

Здесь предполагается, что выполнены следующие предположения:

a) существует непрерывная матричная функция $V(t), t \in [0, 1]$ такая, что для любого $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{E}_\theta N^{-1} \sum_{j=[t_1 N]}^{[t_2 N]} \mathbf{x}(j)\mathbf{x}^*(j) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

где $\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$ - положительно определенная матрица;

b) последовательность случайных векторов $\{(\mathbf{x}(n), \xi_n)\}$ удовлетворяет условиям Крамера и ψ-перемешивания;

c) случайная последовательность $\{\xi_n\}$ является мартингал-разностью относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}$;

d) случайный вектор предикторов $\mathbf{x}(n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1(n), \ldots, x_k(n))^*$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ измеримым.

Положим

$$N^{-1}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^*(k) = \mathcal{V}_N$$

В силу предположений a), b), c), матрица $\mathcal{V}_N$ сходится $\mathbf{P}_\theta$-п.н. к положительно определенной матрице $\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 V(s)ds$, причем скорость сходимости экспоненциальна. Это следует из того факта, что случайные процессы

$$\begin{aligned} U_N^{ij}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} N^{-1}\sum_{n=1}^{[Nt]}\left(x_i(n)x_j(n) - \mathbf{E}_\theta x_i(n)x_j(n)\right), \\ Z_N^i(t) &\stackrel{\text{def}}{=} N^{-1}\sum_{n=1}^{[Nt]}\left(x_i(n)\xi_n\right),\ i,j = 1,\ldots,k \end{aligned}$$

слабо сходятся к нулю (при $N \to \infty$) с экспоненциальной скоростью (см. Brodsky, Darkhovsky, 2000).

Положим

$$\tilde{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_N^{1/2}\mathbf{a},\ \tilde{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_N^{1/2}\mathbf{b},$$

Тогда рассматриваемая модель может быть переписана следующим образом:

$$y_i = \mathbf{x}^*(i)\mathcal{V}_N^{-1/2}\tilde{\mathbf{c}}(i) + \xi_i \tag{7}$$

где $\tilde{\mathbf{c}}(i) = \tilde{\mathbf{a}}I(i \le [\theta N]) + \tilde{\mathbf{b}}I(i > [\theta N])$.

Определим вектор

$$u(n_1,n_2) = \mathcal{V}_N^{-1/2}\sum_{i=n_1}^{n_2}\mathbf{x}(i)y_i,$$

и матрицу

$$\mathcal{T}_{n_1}^{n_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_N^{-1/2}\left\{\sum_{k=n_1}^{n_2}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^*(k)\right\}\mathcal{V}_N^{-1/2},\ 1 \le n_1 < n_2 \le N$$

Для оценивания момента структурного сдвига используется следующая статистика:

$$\mathbb{Y}_N(n) = N^{-1}\left((\mathcal{T}_{n+1}^N)^{1/2}(\mathcal{T}_1^n)^{-1/2}u(1,n) - (\mathcal{T}_1^n)^{1/2}(\mathcal{T}_{n+1}^N)^{-1/2}u(n+1,N)\right) \tag{8}$$

Произвольная точка $\hat{n}$ множества $arg \max\limits_{1\le n\le N} \|\mathbb{Y}_N(n)\|$ принимается в качестве оценки момента структурного сдвига. Определим также величину $\hat{\theta}_N = \hat{n}/N$ в качестве оценки параметра θ.

Нетрудно видеть, что статистика (8)является обобщением статистики (6) на случай стохастической регрессии. Предположения a)- d) гарантируют, что эта статистика обладает теми же свойствами, что и статистика (6). А именно, предельное значение $g(t)$ (при $N \to \infty$) математического ожидания процесса $\mathbb{Y}_N([Nt])$ имеет следующий вид:

$$g(t) = \mathbb{P}_t^{1/2}\mathbb{Q}_t^{-1/2}\int_0^t \mathbb{R}^{-1/2}V(s)\mathbb{R}^{-1/2}\tilde{\mathbf{c}}(s)ds$$
$$-\mathbb{P}_t^{-1/2}\mathbb{Q}_t^{1/2}\int_t^1 \mathbb{R}^{-1/2}V(s)\mathbb{R}^{-1/2}\tilde{\mathbf{c}}(s)ds$$

где

$$\mathbb{P}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{-1/2}\int_t^1 V(s)ds\,\mathbb{R}^{-1/2},\ \mathbb{Q}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{-1/2}\int_0^t V(s)ds\,\mathbb{R}^{-1/2}.$$

Функция $\|g(t)\|$ (как и ранее функция $\|m(t)\|$) достигает единственного глобального максимума в точке $t^* = \theta$ на отрезке $[0,1]$. Сделанные предположения гарантируют сходимость по вероятности произвольной точки максимума статистики $|\mathbb{Y}_N(n)|$ к точке θ с экспоненциальной скоростью. Поэтому справедлива следующая

Теорема 3.

Предположим, что выполнены все сформулированые выше условия a)-d). Тогда оценка $\hat{\theta}_N$ сходится к θ, $\mathbf{P}_\theta$-п.н. и для каждого $\delta > 0$ существуют константы $N(\delta), A(\delta) > 0, B(\delta) > 0$ такие, что для любого $N > N(\delta)$ выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_N - \theta| > \delta\} \le A(\delta)\exp(-B(\delta)N).$$

Множественные структурные сдвиги

Полученные результаты можно обобщить на задачи обнаружения множественных структурных сдвигов. Для того, чтобы пояснить идею этого обобщения, рассмотрим модель множественной регрессии с детерминированными предикторами. Рассмотрим линейную регрессионную модель (3), в которой $\{\xi_i\}$ - последовательность центрированных и, в общем случае, зависимых величин. Как и выше, предположим, что существуют непрерывные и линейно независимые функции $f_i(\cdot) \in C[0,1]$, $i = 1, \ldots, k$, такие, что $x_{in} = f_i(n/N), n = 1, \ldots, N$.

Обозначим для каждого $0 \le t \le 1: \; F(t) = (f_1(t), \ldots, f_k(t))^*$.

Обозначим также

$$z(n_1, n_2) = \sum_{i=n_1}^{n_2} F(\frac{i}{N}) y_i, \quad \mathcal{F}_{n_1}^{n_2} = \sum_{i=n_1}^{n_2} F(\frac{i}{N}) F'(\frac{i}{N}).$$

Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$, $p \ge 1$ - неизвестный вектор параметров структурных сдвигов таких, что $0 \equiv \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_p < \theta_{p+1} \equiv 1$.

Определим вектор кусочно-постоянных регрессионных коэффициентов: $c(\theta, t)$:

$$c(\theta, t) = \sum_{i=1}^{p} a_i I(\theta_{i-1} \le t \le \theta_i) + a_{p+1} I(\theta_p \le t \le 1) \tag{9}$$

и рассмотрим следующую модификацию решающей статистики:

$$Y_N(n) = N^{-1}(z(1,n) - \mathcal{F}_1^n \, (\mathcal{F}_1^N)^{-1} z(1,N)). \tag{10}$$

Математическое ожидание этой статистики при $N \to \infty$ сходится к функции:

$$m(t) = \int_0^t F(s)F'(s)c(\theta, s)ds - A(t)I^{-1} \int_0^1 F(s)F'(s)c(\theta, s)ds,$$

где $A(t) = \int\limits_0^t F(s)F'(s)ds, \; I = \int\limits_0^1 F(s)F'(s)ds.$

Вычислим производную функции $m(t)$, отнормировав ее на матрицу $F(t)F'(t)$:

$$z(t) = (F(t)F'(t))^{-1} m'(t) = c(\theta, t) - I^{-1} \int_0^1 F(s)F'(s)c(\theta, s)ds.$$

Отсюда можно заключить, что функция $z(t)$ изменяется ступенчатым образом в моменты θ_i, $i = 1, \ldots, k$. Более того, если вектор регрессионных коэффициентов постоянен на всем отрезке $[0,1]$, то функция $z(t)$ тождественно равна нулю.

Поэтому можно свести исходную задачу обнаружения множественных структурных сдвигов в регрессионных моделях к задаче обнаружения множественных изменений математического ожидания некоторой вектор-функции, построенной по исходной выборке. Решению этой задачи посвящена обширная литература (см. обзор в Brodsky, Darkhovsky (2000)).

Таким образом, можно предложить следующий алогоритм решения задачи обнаружения и оценивания множественных структурных сдвигов в регрессионных и коинтеграционных моделях. Зафиксируем параметр $\mu > 0$ и положим

$$R_N(n,\mu) = (N^{-1}\mathcal{F}_{(n-[\mu N/2])}^{[(n+[\mu N/2])})^{-1}.$$

Определим решающую статистику

$$U_N(n,\mu) = R_N(n,\mu)(Y_N(n+[\mu N/2]) - Y_N(n-[\mu N/2])). \tag{11}$$

Метод обнаружения множественных структурных сдвигов в регрессионных моделях состоит из следующих шагов:

1. Сформировать векторную статистику $U_N(n,\mu)$

2. Каждая компонента вектора $U_N(n,\mu)$ обрабатывается алгоритмом обнаружения и оценивания моментов разладки по математическому ожиданию наблюдений, изложенным в Brodsky, Darkhovsky, 2000.

3. Совокупность моментов разладки n_i, обнаруженныхв на шаге 2, объявляется оценками неизвестных моментов структурных сдвигов в рассматриваемой регрессионной модели. Величины n_i/N сходятся почти наверно к μ-окрестностям истинных параметров структурных сдвигов θ_i, $i = 1,\ldots,p$.

Справедлива следующая

Теорема 4.

Пусть $\mathcal{M}(\theta,\mu)$ является μ-окрестностью вектора θ. Обозначим через $\hat{p}_N$ оценку количества моментов структурных сдвигов в выборке данных и через $\hat{\theta}_N$ - вектор оценок параметров разладки. Предположим, что выполнены предположения теорем 2 и 3 для детерминированных и стохастических регрессионных планов соответственно. Тогда для каждого $\epsilon > 0$

$$P\{(\hat{p}_N \neq p) \cup (dist(\hat{\theta}_N, \mathcal{M}(\theta,\mu))\} > \epsilon\} \leq C(\epsilon)\exp(-D(\epsilon)N),$$

где константы $C(\epsilon), D(\epsilon)$ не зависят от N.

Предельное распределение статистики при нулевой гипотезе

Для практических применений полученных результатов при анализе структурных сдвигов в эконометрических зависимостях необходимо уметь оценить вероятность ошибки 1-го рода: $P_0\{\max_n |Y_N(n)| > c\}$. Изучение асимптотики этой вероятности основано на функциональной предельной теореме для статистики $Y_N(n)$.

Сформулируем вариант предельной теоремы в предположении независимости "шумов"ξ_i, $i = 1, \dots, N$ для наиболее простой решающей статистики (10).

Пусть существует ограниченная и непрерывная на (0,1) функция $g(t)$ такая, что $E_\theta \xi_i^2 = g^2(i/N)$. Положим

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2(t) &= \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_i^2(s) g^2(s)\, ds, \quad i = 1, \dots, k \\
G(t) &= (\sigma_1(t), \dots, \sigma_m(t))' \\
Z(t) &= G(t) W(t) \\
U(t) &= Z(t) - A(t) I^{-1} Z(1),
\end{aligned}$$

где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, $A(t)$, I – определенные выше матрицы.

Определим процесс $y_N(t) = Y_N([Nt])$. Тогда для каждого $\theta \in [\beta, \gamma]$, где $0 < \beta < \gamma < 1$, процесс $\sqrt{N}(y_N(t) - E_\theta y_N(t))$ слабо сходится в пространстве $D^k[\beta, \gamma]$ к процессу $U(t)$.

Этот результат непосредственно следует из функциональной предельной теоремы для процессов вида

$$S_N(t) = \sum_{k=1}^{[Nt]} f(k/N)\xi(k).$$

При условиях независимости "шумов"$\xi(k)$ процесс $N^{-1/2} S_N(t)$ слабо сходится к процессу $\sigma(t) W(t)$ в пространстве Скорохода $D[0, 1]$.

Поэтому для асимптотики вероятности ошибки 1-го рода можно записать:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \ln P_0\{\max_n |Y_N(n)| > C\} = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \ln P_0\{\sup_{\beta \le t \le \gamma} |U(t)| > N^{1/2} C\}.$$

Путем последовательных замен времени можно убедиться в том, что асимптотика вероятности в правой части последнего соотношения совпадает с асимптотикой вероятности пересечения винеровским процессом некоторой криволинейной границы, пропорциональной $\sqrt{N}$ и зависящей от матрицы регрессионного плана. Исследованию подобных задач посвящена обширная литература.

Немногим более сложно доказать функциональную предельную теорему для решающих статистик (6) и (8) в ситуации детерминированного и стохастического регрессионного плана соответственно. Например, для статистики (6)(в обозначениях п.3.2.1) имеем, что процесс $\sqrt{N}(y_N(t) - E_\theta y_N(t))$ слабо сходится в пространстве

$D^k[\beta, \gamma]$ к процессу $U(t)$, где

$$U(t) = P_t^{-1/2} Q_t^{-1/2} \left(R^{-1/2} G(t) W(t) - Q_t R^{-1/2} G(1) W(1)\right),$$

$G(t)$ - определенная выше вектор-функция; $W(t)$ - стандартный винеровский процесс.

4. Имитационное моделирование

Для проверки эффективности предложенного метода обнаружения и оценивания структурных сдвигов в регрессионных и коинтеграционных зависимостях, а также для сравнения его характеристик с характеристиками качества других методов, включая тесты CUSUM обычных и рекурсивных регрессионных остатков, тест Чоу, а также флуктуационный тест Плобергера, было проведено имитационное моделирование.

***I**. Детерминированный регрессионный план*

Рассматривалась следующая модель наблюдений:

$$y_i = c_0 + c_1 x_i + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{12}$$

где $(x_1, \ldots, x_N)^*$ - детеминированный вектор предикторов; $\{\xi_i\}$ - гауссовский шум с нулевым средним и единичной дисперсией; c_0, c_1 - регрессионные коэффициенты, изменяющиеся в момент $n_0 = [\theta N]$, $0 < \theta < 1$.

При имитационном моделировании решались следующие задачи:

1. Исследование свойств предложенного метода обнаружения структурных сдвигов:

1) Для статистически однородных выборок оценить пороговые границы для различных объемов выборки и доверительных вероятностей;

2)Для выборок с разладкой по регрессионным коэффициентам построить оценки $\hat{\theta}_N = \hat{n}/N$ параметров структурных сдвигов и оценить скорость сходимости этих оценок к истинным параметрам.

2. Сравнительный анализ с характеристиками других известных методов обнаружения и оценивания структурных сдвигов:

1) Для сравнения свойств обнаружения структурных сдвигов в регрессионных зависимостях были выбраны следующие методы:

– Метод Чоу (Chow test), наиболее часто используемый в известных эконометрических пакетах;

– Метод кумулятивных сумм (CUSUM) рекурсивных регрессионных остатков (Brown, Durbin, Evans, 1975);

– Метод кумулятивных сумм обычных регрессионных остатков (OLS CUSUM test, Ploberger, Kramer, 1992);

– Флуктуационный тест (Fluctuation test, Ploberger, Kramer, Kontrus, 1989)

– Тест Вальда (Wald test, Andrews, 1993, Andrews, Ploberger, 1994)

– LM тест (Lagrange Multilpier test, Andrews, 1993).

При исследовании предложенного метода обнаружения структурных сдвигов количество независимых повторений каждого имитационного эксперимента равнялось 2000. Оценки пороговых границ были получены следующим образом. Для каждой однородной выборки расчитывались 95-процентный и 99-процентный квантили вариационного ряда максимумов решающей статистики при 2000 повторениях эксперимента. Эти квантили были далее приняты в качестве оценок пороговых границ с 5-процентным и 1-процентным уровнем ошибки соответственно.

1) Оценки пороговых границ

В первой серии экспериментов использовалась модель (12) с постоянными коэффициентами $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ Были получены следующие результаты.

Таблица 1.

N	100	200	300	400	500	700	1000	1200
$p = 0.95$	0.401	0.257	0.202	0.182	0.150	0.125	0.103	0.081
$p = 0.99$	0.450	0.300	0.247	0.211	0.187	0.162	0.138	0.102

2) Оценка параметра структурного сдвига

Значения порога C в таблице 1 для доверительной вероятности 95 процентов были использованы в качестве решающих границ в экспериментах с неоднородными регрессионными моделями. Рассматривались следующие варианты модели (12):

- до разладки: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$

- после разладки: $c_0 = \delta$, $c_1 = 1$.

В экспериментах варьировался параметр δ и объем выборки N. Оценивались следующие характеристики:

- Эмпирическое оценка максимума статистики $\|Y_N(\cdot)\| : \quad C$;

- Эмпирическая оценка вероятности ошибки второго рода $\hat{w}_N$;

- Эмпирическая оценка параметра структурного сдвига $\hat{\theta}_N$.

Таблица 2. Оценивание параметра структурного сдвига $\theta = 0.30$

N		300	400	500	700	1000
$\delta = 0.3$	C	0.179	0.177	0.168	0.157	0.151
	$\hat{w}_N$	0.64	0.55	0.33	0.13	0.03
	$\hat{\theta}_N$	0.340	0.322	0.332	0.324	0.307
$\delta = 0.4$	C	0.220	0.211	0.208	0.195	0.192
	$\hat{w}_N$	0.28	0.24	0.11	0.02	0.005
	$\hat{\theta}_N$	0.315	0.312	0.308	0.305	0.304

Таблица 3. Оценивание параметра структурного сдвига $\theta = 0.50$

N		300	400	500	700	1000
$\delta = 0.3$	C	0.194	0.184	0.175	0.168	0.164
	$\hat{w}_N$	0.62	0.50	0.25	0.05	0.01
	$\hat{\theta}_N$	0.456	0.485	0.501	0.502	0.499
$\delta = 0.4$	C	0.231	0.221	0.215	0.214	0.211
	$\hat{w}_N$	0.26	0.22	0.003	0.02	0
	$\hat{\theta}_N$	0.495	0.495	0.489	0.501	0.499

Сопоставляя результаты, приведенные в таблицах 2 и 3, можно сделать вывод, что качество обнаружения и оценивания параметра структурного сдвига θ зависит от его расположения на отрезке $[0, 1]$: оценивание θ на краях выборки является более сложной задачей.

Для сравнительного анализа характеристик предложенного метода с другими известными методами обнаружения и оценивания структурных сдвигов та же серия экспериментов с использованием модели (12) была проведена для метода кумулятивных сумм регрессионных остатков и теста Вальда, предложенного в работе Andrews (1993). В частности, для теста Вальда, определяемого как

$$SupW = \max_{\pi = m/N} N[\frac{S - S_1 - S_2}{S_1 + S_2}],$$

где параметр m пробегает значения $1, \ldots, N$; S - сумма остатков в регрессионной модели, построенной по всей выборке данных объема N; S_1 - сумма остатков в регрессионной модели, построенной по подвыборке, образованной первыми m наблюдениями; S_2 - сумма остатков в регрессионной модели, построенной по последним $N - m$ наблюдениям, естественно определить оценку момента структурного сдвига как $n_0 \in arg \sup W$ с соответствующей оценкой парамера структурного сдвига $\hat{\theta}_N = n_0/N$.

Сравнение характеристик различных методов осуществляется следующим образом. Вначале методы "выравниваются"по ошибке 1-го рода в обнаружении структурного сдвига путем подбора соответствующих пороговых границ. Практически для этого используются эксперименты с однородными выборками (без структурных сдвигов), в которых рассчитываются 95-процентные квантили вариационного ряда максимумов решающих статистик (см. выше табл.1). Для выбранных пороговых границ и объемов выборки проводятся эксперименты со структурно неоднородными выборками, в которых рассчитываются оценки вероятности ошибки второго рода и моментов структурных сдвигов (см. табл. 2 и3). Метод "а"обнаружения структурных сдвигов является предпочтительным по отношению к методу "в", если при одинаковых оценках вероятности ошибки 1-го рода метод "а"дает меньшую оценку вероятности ошибки 2-го рода и лучшую точность оценивания параметра структурного сдвига по сравнению с методом "в".

Полученные результаты для теста Вальда приведены в следующих таблицах.

Таблица 4. Оценивание пороговых границ для теста Вальда

N	100	200	300	400	500	700	1000	1200
$p = 0.95$	10.10	8.09	9.59	8.66	8.12	7.62	7.51	7.43
$p = 0.99$	12.60	10.88	14.14	12.10	12.20	9.97	11.68	10.02

Таблица 5. Оценивание параметра структурного сдвига $\theta = 0.30$ для теста Вальда

N		300	400	500	700	1000
$\delta = 0.3$	C	5.63	6.76	8.24	9.77	12.09
	$\hat{w}_N$	0.83	0.71	0.59	0.46	0.32
	$\hat{\theta}_N$	0.29	0.25	0.22	0.19	0.20
$\delta = 0.4$	C	9.65	10.20	11.88	15.27	19.32
	$\hat{w}_N$	0.56	0.47	0.34	0.23	0.18
	$\hat{\theta}_N$	0.28	0.25	0.22	0.20	0.23

Из сравнения результатов, приведенных в таблицах 2 и 5, видно, что вероятность ошибки 2-го рода для предложенного метода существенно ниже, чем для теста Вальда, а точность оценивания параметра структурного сдвига - намного выше, чем для теста Вальда. Следовательно, предложенный метод явно выигрывает по характеристикам качества обнаружения структурных сдвигов по сравнению с тестом Вальда.

Вместе с тем, хорошо известно (см, например, Maddala and Kim (1998)), что из всех известных методов обнаружения структурных сдвигов именно тест Вадьда (наряду с методом QMLE - quasi-maximum likelihood estimation) является наиболее часто используемым, поскольку он имеет лучшие характеристики мощности и точности оценивания структурных сдвигов из всех вышеперечисленных методов. Поэтому можно сделать вывод, что предложенный метод обнаружения и оценивания структурных сдвигов является вполне конкурентоспособным по качеству обнаружения и оценивания структурных сдвигов в регрессионных моделях.

II. *Стохастический регрессионный план*

В этой серии тестов использовалась следующая модель наблюдений

$$y_i = c_0 + c_1 x_i + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

где $(x_1, \ldots, x_N)^*$ - нестационарная случайная последовательность типа I(1), т.е. процесс со стохастическим трендом ("единичным корнем"):

$$x_i = x_{i-1} + \eta_i, \quad i = 1, \ldots, N, \ x_0 \equiv 0,$$

$\{\xi_i, \eta_i\}$ - последовательность независимых гауссовских наблюдений с нулевым средним и единичной дисперсией; c_0, c_1 - регрессионные коэффициенты, которые изменяются в момент $n_0 = [\theta N]$, $0 < \theta < 1$.

1) Оценка пороговых границ

В соответствии с изложенным подходом к исследованию и сравнительному анализу методов обнаружения и оценивания структурных сдвигов, в первой серии экспериментов исследовались статистически однородные последовательности, т.е. приведенная выше модель наблюдений, в которой $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ и отсутствуют структурные сдвиги. Были получены следующие результаты.

Таблица 6.

N	100	200	300	400	500	700	1000	1200
$p = 0.95$	0.355	0.291	0.230	0.188	0.150	0.132	0.103	0.082
$p = 0.99$	0.401	0.332	0.273	0.218	0.192	0.171	0.141	0.100

2) Оценка параметра структурного сдвига

В следующей серии экспериментов рассматривалась модель со структурным сдвигом по регрессионным коэффициентам:

– до момента структурного сдвига: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$

– после момента структурного сдвига: $c_0 = 0$, $c_1 = 1.3$.

Результаты, полученные с использованием пороговых границ, рассчитанных в таблице 6, приведены в таблице 7.

Таблица 7.

N		500	700	1000	1200
$\theta = 0.5$	C	0.167	0.157	0.152	0.152
	$\hat{w}_N$	0.32	0.21	0.02	0
	$\hat{\theta}_N$	0.481	0.495	0.498	0.499
$\theta = 0.3$	C	0.156	0.148	0.142	0.140
	$\hat{w}_N$	0.45	0.30	0.03	0
	$\hat{\theta}_N$	0.312	0.310	0.308	0.301

Вновь мы видим, что результаты, полученные для параметра структурного сдвига $\theta = 0.5$, немного лучше, чем для параметра $\theta = 0.3$.

5. Практические применения

На основе описанного метода был разработан алгоритм обнаружения множественных структурных сдвигов в регрессионных зависимостях, реализованный в среде MATLAB. С использованием этой программы были решены задачи обнаружения структурных сдвигов в эконометрических зависимостях, описывающих взаимосвязи между ключевыми макроэкономическими показателями в России в период 1994-2005 годов.

Далее мы подробно остановимся на следующих важнейших макроэкономических зависимостях в российской экономике 1990-2000х годов:

- Модель инфляции на потребительском рынке

- Модель экспорта товаров и услуг в зависимости от мировых цен на нефть;

1) Модель инфляции на потребительском рынке

Моделирование инфляции в России 1994-2005 гг. является актуальной задачей, имеющей существенное прикладное значение. На протяжении всего периода реформ 1990-х гг. велись активные дискуссии о том, какие факторы предопределяют динамику инфляции в экономике России. Помимо влияния классических монетарных факторов - денежной массы и обменного курса, подчеркивалось влияние "немонетарных"факторов: инфляционных ожиданий, тарифов и цен естественных монополий - на динамику инфляции в России. Вместе с тем, представляется весьма правдоподобным, что на разных временных периодах динамика инфляции в России формировалась под воздействием различных преобладающих факторов. Так, в посткризисный период 1999-2004 гг. вследствие сдерживания темпов роста тарифов естественных монополий в России влияние этого фактора на инфляционные процессы стало менее заметным. Практически важным является анализ структурных сдвигов в моделях инфляции, включающий обнаружение и оценку моментов структурных сдвигов по полученным выборкам данных.

Приведем вначале наиболее полную регрессионную модель для показателя "темп инфляции на потребительском рынке"(pi=CPI/100-1, где CPI - помесячный индекс потребительских цен), полученную на временном интервале 1994(1)-2004(12) и включающую следующий набор предикторов:

- инфляционные ожидания (pi(-1));

- темп роста денежной массы: mu=M2/M2(-1)-1, где M2 - денежный агрегат M2;

- темп роста номинального курса доллара: eps=E/E(-1)-1;

- темп роста тарифов на электроэнергию для конечных потребителей: piel;

- сезонная дамми-переменная: Seas.

Все переменные, входящие в модель, были проверены на стационарность с использованием теста Диккей-Фуллера. Проверка подтвердила, что все переменные имеют порядок I(0). Поэтому для построения модели для показателя тема инфляции можно использовать методологию линейного регрессионного анализа. Полученная регрессионная модель на интервале 1994(8)-2004(12)имеет следующий вид (в скобках приведены значения t-статистик для соответствующих коэффициентов):

$$\begin{array}{llllllllll} pi = & 0.2746 & pi(-1)+ & 0.2121 & piel+ & 0.3551 & eps+ & 0.1676 & mu(-6)+ \\ & (7.919) & & (5.573) & & (25.169) & & (5.857) & \\ & 0.0124 & Seas- & 0.0175 & Seas(-7) & & & & \\ & (2.414) & & (-3.554) & & & & & \end{array} \tag{13}$$

Показатели качества этой зависимости: коэффициент детерминации R2 = 0.91; среднеквадратичная ошибка $\sigma = 0.015$; статистика Дарбина-Уотсона (справочно) DW = 1.68.

Для формального анализа структурных сдвигов в рассматриваемой модели использовался предложенный в работе метод. Обнаружение и оценивание моментов структурных сдвигов было проведено с использованием метода (11). В результате были выявлены следующие моменты структурных сдвигов:

- n1=19
- n2=57
- n3=82
- n4=115

Соотнесение этих моментов с реальной временной шкалой позволяет выделить следующие события, повлиявшие на базовые взаимосвязи макроэкономических переменных, участвующих в модели инфляции:

- август 1995 г.: кризис на рынке межбанковских кредитов в России, вызванный недостатком ликвидности банковской системы, который, в свою очередь, объяснялся стремлением денежных властей "обуздать"высокую инфляцию монетаристскими методами (ограничение темпов роста денежной массы, введение "валютного коридора");
- сентябрь 1998 г.: крупнейший макроэкономический и финансовый кризис в России, вызвавший расстойство всей финансовой системы;
- ноябрь 2000 г.: переход к политике сдерживания инфляции посредством ограничения темпов роста курса доллара и тарифов естественных монополий;
- июль 2003 г.: начало "нефтяного бума", вызванного сверхвысоким мировыми ценами на нефть и ростом цен на бензин, повлиявшим на темпы инфляции в России.

Таким образом, предложенный метод позволяет выявлять моменты структурных сдвигов в регрессионной модели, которые допускают содержательную экономическую интерпретацию.

2)Модель экспорта товаров и услуг

Далее проведен анализ структурных сдвигов в коинтеграционной зависимости объемов экспорта товаров и услуг от экспортных цен на нефть, полученной в диапазоне данных 1994(1)-2004(12) (132 наблюдения). Проверка этих рядов на стационарность с использованием теста Диккей-Фуллера показала, что рассматриваемые переменные имеют порядок нестационарности I(1). Поэтому возможно существование коинтеграционных взаимосвязей между рассматриваемыми показателями.

С использованием месячных данных за период 1994(1)-2004(12) была построена следующая долгосрочная коинтеграционная зависимость:

$$log(Expo) = -1.542 + \underset{(19.852)}{0.743} \quad log(woil) \tag{14}$$

В этой зависимости: $Expo$ - объем экспорта товаров и услуг (млн. долл.), $woil$ - экспортная цена на сырую нефть (долл. за тонну). В скобках приведено значение t-статистики.

Для этой зависимости получены следующие показатели качества: $R2 = 0.752$, $DW = 0.997$, $t_{adf} = -5.432(1\% = -2.585)$, которые говорят о том, что между рассматриваемыми переменными существует устойчивая долгосрочная коинтеграционная зависимость. Здесь $R2$ - скорректированный коэффициент детерминации; DW - критерий Дарбина-Уотсона; t_{adf} - критерий Диккей-Фуллера для ряда регрессионных остатков.

Таким образом, долгосрочный коэффициент эластичности экспорта по мировой цене нефти составляет 0.743, что свидетельствует о высокой чувствительности объемов российского экспорта к динамике цены за нефть. Вместе с тем, вопрос о корректности полученной коинтеграционной зависимости и возможности ее использования для прогноза объемов экспорта является не столь простым и требует проверки этой зависимости на наличие структурных сдвигов в интервале данных 1994(1)-2004(12).

В рассматриваемом диапазоне данных существуют, по меньшей мере, три момента разладки: наиболее значимый структурный сдвиг – примерно в момент $n_0 = 60$ (в относительных единицах при объеме выборки, равном $N = 113$), и два других: $n1 \sim 15$, $n2 \sim 80$. Для корректной количественной оценки моментов структурных сдвигов в рассматриваемой зависимости необходимо определить значение пороговой границы. При расчете пороговой границы использовалась подвыборка данных в интервале (15,60), который по содержательному смыслу задачи и по виду решающей статистики принимается за стационарный режим. По значению максимума решающей статистики в данном диапазоне было получено значение пороговой границы $C = 0.019$, которое с учетом корректировок по объему выборки использовалось далее для оценки моментов структурных сдвигов.

В результате были обнаружены следующие моменты структурных сдвигов в рассматриваемой выборке (1994(1)-2004(12), 132 наблюдения):

– n1=19, соответствующий периоду 1995(6)-1995(7), когда был введен т.н. "валютный коридор"в России;

– n2=61, соответствующий финансовому кризису 1998(9)-1998(10) в России;

– n3=85, соответствующий этапу посткризисного роста российской экономики и введению "плавающей"ставки таможенных пошлин за экспорт нефти и нефтепродуктов

– n4=98, соответствующий современному этапу роста "несырьевого"экспорта в России.

Заметим, что полученные оценки моментов структурных сдвигов в зависимости (14) соответствуют значимым макроэкономическим событиям и изменениям в режиме функционирования экономической системы. Они близки полученным выше моментам структурных сдвигов в модели инфляции в России.

6. Выводы

В заключение подчеркнем основные идеи этой работы:

1. Предложен новый метод обнаружения структурных сдвигов (разладок, structural breaks) в регрессионных и коинтеграционных эконометрических моделях с детерминированными и стохастическими регрессорами.В отличие от других известных методов обнаружения структурных сдвигов в регрессионных моделях, предложенный метод не использует МНК-оценки регрессионных параметров и поэтому является более робастным в отношении возможных ошибок в спецификации модели.

2. Установлены априорные теоретико-информационные границы снизу для вероятности ошибки оценивания параметра структурного сдвига, которые позволяют утверждать, что оптимальная скорость сходимости оценок параметра структурного сдвига к его истинному значению является экспоненциальной по объему выборки данных N. Эти априорные нижние границы могут быть использованы в следующих целях:

- для поиска асимптотически оптимальных методов обнаружения структурных сдвигов в регрессионных и коинтеграционных моделях, для которых достигается оптимальный экспоненциальный порядок сходимости оценок параметров структурных сдвигов к их истинным значениям, а также для сравнительного анализа этих методов по показателям качества обнаружения структурных сдвигов;

- для построения асимптотически оптимальных доверительных интервалов для оценок параметров структурных сдвигов.

3. Установлена асимптотическая оптимальность предложенных методов обнаружения структурных сдвигов в регрессионных и коинтеграционных зависимостях.

4. Проведено имитационное моделирование свойств предложенных методов обнаружения и оценивания структурных сдвигов для конечных выборок данных. На основе сравнительного анализа показателей качества предложенных методов с аналогичными показателями, исследованными для других известных методов (вероятнось ошибки второго рода, точность оценивания параметров структурных сдвигов), включая тест Вальда, методы кумулятивных сумм обычных и рекурсивных регрессионных остатков, флуктуационный тест и др.) можно сделать вывод о том, что предложенные методы не уступают, а в некоторых случаях даже превосходят другие известные методы по качеству обнаружения и оценивания структурных сдвигов.

5. Предложенные методы были использованы для исследования структурных сдвигов в следующих эконометрических моделях:

- моделирование инфляции в России 1994-2004 гг. в зависимости от монетарных (денежная масса, обменный курс), немонетарных (инфляционные ожидания, тарифы естественных монополий) и сезонных факторов;

- моделирование экспорта товаров и услуг в России 1994-2004 гг. в зависимости от экспортных цен на нефть;

Обнаруженные моменты структурных сдвигов в этих эконометрических моделях оказываются близки к значимым макроэкономическим событиям 1990-2000-х гг. в России: введению "валютного коридора"в июле 1995 г., финансовому кризису 1998 г., переходу к политике ограничения темпов роста цен естественных монополий и сдерживанию роста обменного курса доллара с 2001-2002 гг., нефтяному буму 2003-2004 гг. Это позволяет сделать вывод о том, что предложенные методы могут быть использованы для решения актуальных практических задач проверки адекватности эконометрических моделей, поиска "переломных точек"в экономической политике - в целом, для повышения качества эконометрического моделирования.

Список литературы

Andrews D.W.K. (1993) Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. Econometrica, 61, 821-856.

Andrews D.W.K., Ploberger W. (1994) Optimal tests when a nuisense parameter is present only under the alternative. Econometrica, 62, 1383-1414.

Bai, J., Lumsdaine R., & Stock J. (1998). Testing for and Dating Common Breaks in Multivariate Time Series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.

Bai, J., & Perron, P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66, 1, 47–78.

Brodsky, B.E., Darkhovsky B.S. (1993). *Non-parametric Methods in Change-Point Problems.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brodsky, B.E., & Darkhovsky, B.S. (2000). *Non-Parametric Statistical Diagnosis. Problems and Methods.* Dordreht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, R.L., Durbin, J., & Evans, J.M. (1975). Techniques for testing the constancy of regression relationships over time *Journal of Royal Statistical Society*, Seria B, 37, 149–192.

Csörgő, M., & Horvath L. (1997). *Limit theorems in change-point analysis.* Chichester: Wiley.

Chow G.C. (1960) Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. Econometrica, 28, 591-605.

Darkhovsky, B.S. (1995). Retrospective change-point detection in some regression models. *Theory of Probability and Applications*, 40, 4, 898-903.

Gombay, E., & Horvath, L.(1994) Limit theorems for changes in linear regression. *Journal of Multivariate Analysis*, 48, 43–69.

Horváth, L., Huskova, M., & Serbinowska, M. (1997). Estimators for the time of change in linear models. *Statistics*, 29, 109–130.

Huskova, M. (1996). Estimation of a change in linear models *Statist. Probab. Letters*, 26, 13–24.

James, B., James, K.J., & Siegmund, D. (1987). Tests for a change-point. *Boimetrika*, 74. 71–83.

Kim, H.-Ju., & Siegmund, D. (1989). The likelihood ratio test for a change-point in simple linear regression. *Biometrika*, 76, 3, 409–423.

Kim, H.J. (1994). Tests for a change-point in linear regression. *IMS Lecture Notes,* *Monograph Series*, 23, 170–176.

Konev, V., & Lai, T. (1995). Estimators with prescribed precision in stochastic regression models. *Sequential Analysis*, 14, 179–192.

Krämer, W., Ploberger, W., & Alt, R. (1988). Testing for structural change in dynamic models. *Econometrica*, 56, 6, 1355–1369.

Maddala, G., & Kim, I. (1998). *Unit roots, cointegration, and structural change.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Maronna, R., & Yohai, V. (1978). A bivariate test for the detection of a systematic change in mean. *Journal of American Statistical Association*, 73, 640–645.

Nelson, C., & Plosser, C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10, 130–162.

Perron, P. (1989). The Great crash, the oil price shock, and the Unit root hypothesis. *Econometrica*, 57, 1361–1401.

Perron, P., & Vogelsang, T. (1992). Nonstationarity and level shifts with an application to purchasing power parity. *Journal of Business and Economic Statistics.* – 1992, 10, 3, 301–320.

Ploberger W., Kramer W. (1992) The CUSUM test with OLS residuals. Econometrica, 60, 271-285.

Ploberger W., Kramer W., Kontrus K. (1989) A new test for structural stability in the linear regression model. Journal of Econometrics, 40, 307-318.

Quandt, R.E. (1958). The estimation of parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. *Journal American Statistical Association*, 50, 873–880.

Quandt, R.E. (1960). Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes. *Journal American Statistical Association*, 55, 324–330.

Worsley, K.J. (1986). Confidence regions and tests for a change-point in a sequence of exponential family random variables. *Biometrika*, 73, 91–104.

Zivot, E., & Andrews, D. (1992). Further evidence on the Great crash, the oil price shock and the Unit root hypothesis. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251–287.