Мониторинг структурных сдвигов в эконометрических моделях

Бродский Б.Е.

1. Введение

Задача мониторинга структурных сдвигов в многомерных стохастических системах на основе последовательных наблюдений имеет множество практических приложений, включая задачи обнаружения моментов изменения коэффициентов в системах одновременных эконометрических уравнений, задачи проверки адекватности регрессионных моделей, задачи последовательного диагноза систем в пространстве состояний. Существует обширная статистическая и эконометрическая литература, посвященная методам решения этих задач.

Пейдж (1954)рассмотрел задачу последовательного обнаружения момента изменения одномерной функции распределения последовательности независимых наблюдений и предложил тест кумулятивных сумм (CUSUM), представляющий собой статистику последовательного критерия отношения правдоподобия с отражением в нуле. Гиршик и Рубин (1952) использовали последовательный квази-байесовский тест для решения этой задачи.

В 1959 году Колмогоров и Ширяев предложили формальную постановку задачи "последовательного обнаружения спонтанно возникающих эффектов", которая несколько позже получила название "задачи о разладке"(нормального состояния объекта, технологического процесса и т.д.). В цикле работ 1959-1965 годов Ширяев нашел оптимальное решение этой задачи в ситуации полной априорной информации о функции распределения наблюдений и момента разладки. Оптимальный тест, предложенный Ширяевым, совпадает с квази-байесовским тестом Гиршика-Рубина и сокращенно называется GRSh (Girshik-Rubin-Shiryaev) тестом.

В последующие годы развитие методов последовательного обнаружения разладки шло по пути ослабления априорных предположений о наблюдениях и моменте разладки. В ситуации, когда момент разладки является неизвестной детерминированной величиной, Лорден (1971), Поллак (1985) и Мустакидес (1986) доказали асимптотическую оптимальность тестов CUSUM и GRSh для различных критериев минимизации средного и условного среднего времени запаздывания в обнаружении разладки при ограничении сверху на среднее время между "ложными тревогами".

Вильский (1976) впервые рассмотрел задачу обнаружения моментов резких структурных сдвигов в стохастических динамических системах. При этом "шумы"в системе предполагались гауссовскими, а под структурными сдвигами понимались спонтанно возникающие аддитивные слагаемые в уравнениях системы. Для обнаружения моментов структурных сдвигов использовался обновляющий процесс фильтра Калмана для рассматриваемой системы. Различные обобщения этой идеи в задачах обнаружения структурных сдвигов в стохастических динамических системах были предложены в работах Basseville, Benveniste (1983), Basseville, Nikiforov (1993), Nikiforov (1995), Bansal, Papantoni-Kazakos (1983).

В работах Лая (1995, 1998) задача последовательного обнаружения моментов структурных сдвигов в многомерных динамических системах была обобщена на случай статистически зависимых наблюдений. Лай рассматривает тесты обобщенного отношения правдоподобия с конечной "памятью"и доказывает их асимптотическую оптимальность в ситуации зависимых наблюдений.

Современные исследования в этой области сконцентрированы на различных обобщениях задачи обнаружения структурных сдвигов: Nikiforov (1995, 1998), Tartakovsky (1998) рассматривают задачи с множественными альтернативами, возникающими после момента разладки. В задачу оптимального теста входит не только скорейшее обнаружение момента разладки, но и оптимальная классификация альтернатив после обнаруженного момента разладки.

Несмотря на большой объем литературы по методам обнаружения структурных сдвигов в стохастических динамических системах, существует множество нерешенных открытых проблем в этой области, среди которых отметим проблему априорной информации о наблюдениях и спецификации динамической системы.

Между полюсами "полного знания"(известна как функция распределения наблюдений, так и спецификация динамической системы) и "полного незнания"(неизвестен ни вероятностный закон порождения наблюдений, ни спецификация динамической системы) существует практически значимая область *семи-параметрических моделей*, когда известна спецификация динамической системы, но функция распределения наблюдений неизвестна. Важнейшие примеры подобных семипараметрических постановок задачи включают:

1) модели многофакторной регрессии и систем одновременных урав-

нений в эконометрике, в которых, как правило, известна спецификация модели (например, линейные регрессионные и авторегрессионные зависимости), но функция распределения последовательностей "шумов"неизвестна. Задача состоит в последовательном обнаружении структурных сдвигов в этих моделях, которые включают как резкие изменения коэффициентов уравнений, так и появление новых элементов спецификации модели (например, новые аддитивные слагаемые в уравнениях);

2) модели динамических систем "вход-выход"в теории управления. Здесь "передаточная функция"системы известна с точностью до значений ее параметров, однако закон распределения последовательности стохастических "шумов"неизвестен. Задача состоит в последовательном обнаружении спонтанных изменений параметров передаточной функции системы;

3) модели многофакторных динамических систем в пространстве состояний. Здесь известны уравнения векторных переменных состояния и наблюдений рассматриваемой системы, однако закон распределения стохастических шумов неизвестен. Дополнительная сложность состоит в том, что вектор состояния в этой системе ненаблюдаем. Задача состоит в последовательном обнаружении структурных сдвигов в уравнениях для вектора состояния и наблюдений этой системы. При этом метод оценивания может использовать только наблюдаемые переменные системы.

Задачи мониторинга структурных сдвигов в эконометрических моделях стали анализироваться в конце 1990-х годов. Chu, Stinchcombe, White (1996) впервые рассмотрели задачу последовательного обнаружения структурных сдвигов в модели многофакторной линейной регрессии. Для обнаружения структурных сдвигов использовалась последовательная версия флуктуационного теста Плобергера (1988). Модификации последовательных тестов кумулятивных сумм регрессионных остатков для обнаружения структурных сдвигов были предложены в работе Leisch, Hornik, Kuan (2000). Обобщение этих результатов для регрессионных моделей со стационарными стохастическими предикторами было предложено в работе Horvath, Huskova, Kokoszka, Steinebach (2004). Динамические регрессионные модели со структурными сдвигами были рассмотрены в работе Zeileis, Leisch, Kleiber, Hornik (2005).

Недостатком этих работ является то обстоятельство, что качество тестов анализируется исключительно с точки зрения предельных распределений предложенных статистик. При этом свойства методов для конечных выборок исследуются, в основном, эмпирически. Вместе с тем, анализ свойств методов для конечных выборок данных является чрезвычайно актуальной практической задачей. Другим недостатком существующих методов обнаружения структурных сдвигов в эконометрических моделях является полное отсутствие исследований оптимальности и асимптотической оптимальности этих методов. По сути дела, не разработаны методологические подходы к исследованию свойств оптимальности методов и их сравнительному анализу, что существенно затрудняет использование этих методов в практике эконометрического анализа.

Рассмотрим характерную практическую задачу, в которой эти проблемы приобретают особую остроту. При эксплуатации прикладных эконометрических моделей на длительных периодах часто возникает вопрос об адекватности модели, т.е. ее статистического соответствия текущей информации о наблюдаемом процессе (объекте, явлении). Другими словами, свойства экономического объекта могут спонтанно измениться, однако исследователь продолжает использовать прежнюю модель, не подозревая о ее неадекватности изменившемуся объекту. Это приводит к резкому ухудшению качества прогнозов, получаемых с использованием модели.

Для диагностики адекватности модели, в принципе, должны использоваться методы мониторинга структурных сдвигов в эконометрических моделях. Однако практическое использование этих методов сопряжено с выбором их ключевых параметров: порогов решающих статистик, размера "окна"наблюдений и др. Эти параметры существенно зависят от объема выборки данных, на которой они были откалиброваны. Другая сложность состоит в том, что разные методы мониторинга структурных сдвигов требуют различной настройки параметров и далеко не всегда ясно, как наилучшим образом подобрать метод мониторинга для конкретной задачи.

В статье предложен новый метод мониторинга структурных сдвигов в эконометрических моделях, который позволяет эффективно решать эти задачи. При этом характеристики качества предложенного метода исследуются для конечных объемов выборок данных. Получены теоретико-информационные нижние границы для характеристик качества методов мониторинга структурных сдвигов, которые позволяют проводить сравнительный анализ различных методов и доказывать асимптотическую оптимальность. Проведено экспериментальное исследование свойств предложенного метода для сгенерированных моделей линейной регрессии, систем одновременных эконометрических уравнений, моделей в пространстве состояний, а также для реальной эконометрической модели инфляции в России 1994-2005 годов.

2. Метод обнаружения

Модель

Рассмотрим следующую базовую спецификацию стохастической модели со структурными сдвигами:

$$Y(n) = \Pi X(n) + \nu_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $Y(n) = (y_{1n}, \dots, y_{mn})'$ - вектор эндогенных переменных; $X(n) = (x_{1n}, \dots, x_{kn})'$ - вектор предетерминированных переменных (включая экзогенные и лаговые эндогенные переменные) ; $\nu_n = (\nu_{1n}, \dots, \nu_{mn})'$ - вектор ошибок.

Матрица Π размерностью $m \times k$ изменяется в некоторый неизвестный момент n_0, т.е.

$$\Pi = \Pi(n) = \mathbf{a}I(n \leq n_0) + \mathbf{b}I(n > n_0), \quad n = N, N+1, \dots \tag{2}$$

Отметим, что модель (1) является обобщением многих широко распространенных эконометрических моделей:

- статические и динамические многофакторые регрессионные модели;

- системы одновременных эконометрических уравнений.

Далее будут рассмотрены обобщения этой модели на более сложные стохастические системы с изменяющимися параметрами, в частности, модели в пространстве состояний.

Предположения

Сформулируем предположения о случайных шумах ν_n и предикторах $X(n)$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим некоторую фильтрацию $\{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_n \subset \mathfrak{F}$, обозначающую объем доступной информации к моменту n.

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ - две σ-алгебры, содержащиеся в $\mathfrak{F}$. Обозначим через $L_p(\mathcal{H})$ пространство L_p-интегрируемых случайных величин, измеримых относительно некоторой σ-алгебры $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Определим следующую меру зависимости между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$:

$$\psi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \sup_{A \in \mathcal{H}_1, B \in \mathcal{H}_2, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0} \Big| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1 \Big|$$

Пусть $(\xi_i, i \geq 1)$ - последовательность действительных случайных векторов на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Обозначим через $\mathfrak{F}_s^t = \sigma\{\xi_i : s \leq i \leq t\}, 1 \leq s \leq t < \infty$ минимальные σ-алгебры, порожденные векторами ξ_i, $s \leq i \leq t$. Положим

$$\psi(n) = \sup_{t \geq 1} \psi(\mathfrak{F}_1^t, \mathfrak{F}_{t+n}^\infty)$$

Последовательность $(\xi_i; i \geq 1)$ удовлетворяет условию *ψ-перемешивания*, если функция $\psi(n)$ (которая называется *коэффициентом ψ-перемешивания*), сходится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

Последовательность $\{\zeta(n)\}$ действительных случайных векторов $\zeta(n) \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_1(n), \ldots, \zeta_k(n))$ удовлетворяет равномерному условию Крамера, если существует константа $L > 0$ такая, что

$$\sup_n \mathbf{E} \exp\left(t\zeta_i(n)\zeta_j(n)\right) < \infty$$

для любых $i, j = 1, \ldots, k$ и $|t| < L$.

Далее в этом разделе предполагается, что последовательность шумов ν_n удовлетворяет условиям Крамера и ψ-перемешивания.

Сформулируем также предположения относительно предикторов $X(n)$. Предполагается, что вектора предикторов $\mathbf{X}(n)$ случайны и стационарны ($I(0)$), а также выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{X}(n)$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ измеримым;

2) существует непрерывная матричная функция $V(t), t \in [0,1]$ такая, что для каждого $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E} N^{-1} \sum_{j=[t_1 N]}^{[t_2 N]} \mathbf{X}(j)\mathbf{X}^*(j) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt,$$

где $\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$ - положительно определенная матрица;

3) случайная векторная последовательность $\{(\mathbf{X}(n), \nu_n)\}$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания и равномерному условию Крамера;

4) случайная векторная последовательность $\{\nu_n\}$ является мартингал-разностью относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}$.

Отметим, что эти предположения выполняются в большинстве практических задач эконометрического анализа.

Метод

Идея метода состоит в использовании "скользящего окна"('moving window') наблюдений для последовательного обнаружения момента структурного сдвига. Пусть размер "окна"задается некоторым "большим параметром"N. Тогда для каждого $n = N, N+1, \ldots$ будем рассматривать N последних векторов наблюдений $Y(i), X(i)$, $i = n-N+1, \ldots, n$.

Метод обнаружения строится следующим образом. Вначале рассмотрим матрицы размерности $k \times k$:

$$\mathcal{T}^n(1,l) = \sum_{i=1}^{l} X(i+n-N)X^{'}(i+n-N), \quad l = 1, \ldots, N. \qquad (3)$$

Далее строятся матрицы размерности $k \times m$:

$$z^n(1,l) = \sum_{i=1}^{l} X(i+n-N)Y'(i+n-N), \quad l = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

Решающая статистика метода имеет вид:

$$Y_N^n(l) = \frac{1}{N}(z^n(1,l) - \mathcal{T}^n(1,l)(\mathcal{T}^n(1,N))^{-1} z^n(1,N)). \tag{5}$$

Для обнаружения момента структурного сдвига n_0 рассмотрим марковский момент

$$\tau_N = \inf\{n : \max_{l} \|Y_N^n(l)\| > C\}, \tag{6}$$

где C - некоторая граница принятия решения о разладке, $\|A\|$ - евклидова норма матрицы A.

В дальнейшем обозначим через $P_0(E_0)$ меру (математическое ожидание), соответствующую последовательности наблюдений без разладки, и через $P_m(E_m)$ - меру (ожидание), соответствующую последовательности с разладкой в момент m.

Качество обнаружения структурных сдвигов характеризуется следующими показателями:

- вероятность ошибки 1-го рода ("ложная тревога"):

$$\alpha_N = \sup_{n \geq N} P_0\{\max_{1 \leq l \leq N} \|Y_N^n(l)\| > C\} \tag{7}$$

- вероятность ошибки 2-го рода ("пропуск цели"):

$$\beta_N = \sup_{m \leq n \leq m+N} P_m\{\max_{1 \leq l \leq N} \|Y_N^n(l)\| \leq C\},$$

- нормированное время запаздывания в обнаружении разладки:

$$\gamma_N = (\tau_N - m)^+/N, \tag{8}$$

где $a^+ = \max(0, a)$.

В следующей теореме изучается асимптотическое поведение вероятности ошибки 1-го рода.

Теорема 1.

Предположим, что случайная последовательность ν_n удовлетворяет условиям Крамера и ψ-перемешивания.

Тогда для дюбого $C > 0$ справедлива следующая экспоненциальная оценка сверху для вероятности ошибки 1-го рода ("ложная тревога"):

$$\alpha_N \leq m_0(C) \begin{cases} \exp(-\dfrac{NC}{4m_0(C)}), & C > hT \\ \exp(-\dfrac{NC^2}{4hm_0(C)}), & C \leq hT, \end{cases} \tag{9}$$

где константы h, T и $m_0(\epsilon) \geq 1$ взяты из условий Крамера и ψ-перемешивания.

В следующей теореме устанавливаются свойства нормированного времени запаздывания γ_N в обнаружении разладки.

Рассмотрим матрицу $k \times k$

$$A(t) = \int\limits_0^t V(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Обозначим $I = A(1)$.

Для каждого $0 \leq \theta \leq 1$ рассмотрим функцию

$$g(\theta) = \|A(\theta)(E - I^{-1}A(\theta))(\mathbf{a} - \mathbf{b})\|.$$

Имеем $g(0) = g(1) = 0$. Рассмотрим точку θ^* глобального максимума функции $g(\theta)$ на отрезке $[0, 1]$.

Выберем решающую границу из условия $0 < C < g(\theta^*)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.

Предположим, что выполнены все вышеперечисленные предположения. Пусть $d = g(\theta^*) - C$. Тогда для вероятности ошибки 2-го рода справедлива оценка:

$$\beta_N \leq m_0(d) \begin{cases} \exp(-\dfrac{Nd}{4m_0(d)}), & d > hT \\ \exp(-\dfrac{Nd^2}{4hm_0(d)}), & d \leq hT, \end{cases} \tag{10}$$

Относительное запаздывание γ_N п.н. сходится к детерминированному пределу при $N \to \infty$:

$$\gamma_N = \frac{(\tau_N - m)^+}{N} \to \gamma^* \quad P_m - \text{п.н. при } N \to \infty, \tag{11}$$

где γ^* - минимальный корень уравнения $g(t) = C$.

Пусть $d^* = g(\gamma^*) - C$. Тогда для каждого конечного N и $0 < \epsilon < 1$ выполнено следующее неравенство:

$$P_m\{|\gamma_N - \gamma^*| > \epsilon\} \leq m_0(d^*) \begin{cases} \exp(-\dfrac{Nd^*\epsilon}{4m_0(d^*)}\mathrm{tr}((\mathbf{a}-\mathbf{b})'(\mathbf{a}-\mathbf{b})D)), & d^* > hT \\ \exp(-\dfrac{N(d^*)^2\epsilon^2}{4hm_0(d^*)}\mathrm{tr}^2((\mathbf{a}-\mathbf{b})'(\mathbf{a}-\mathbf{b})D)), & d^* \leq hT, \end{cases} \tag{12}$$

где D - положительно определенная матрица.

В теоремах 1 и 2 исследовались основные характеристики качества предложенного метода. Оценки и соотношения, полученные для этих характеристик, могут служить основой для исследования свойств асимптотической оптимальности предложенного метода. Это исследование базируется на теоретико-информационных нижних границах для основных характеристик качества произвольного метода.

3. Эксперименты

В этом разделе приведены результаты экспериментального исследования предложенного метода. Целью исследования была проверка эффективности метода в различных задачах последовательного обнаружения структурных сдвигов, включая регрессионные модели, системы одновременных эконометрических уравнений, многомерные стохастические системы в пространстве состояний.

1) Регрессионные модели

Вначале рассматривалась линейная регрессионная модель следующего вида:

$$y_i = c_0 + c_1 x_i, \quad i = 1, \dots$$

где $x_i = 2 + \xi_i$ и $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Анализ свойств метода проводился по следующей общей схеме. На первом этапе рассматривалась регрессионная модель без структурных сдвигов с коэффициентами $c_0 = 0,\ c_1 = 1$. В 2000 независимых повторениях каждого эксперимента рассчитывались значения максимума решающей статистики для различных значений объема "скользящего окна" N. Затем строился вариационный ряд максимумов решающей статистики и вычислялись значения 95- и 99-процентных квантилей этого ряда. Значения 99-процентного квантиля для различных объемов выборки N принимались далее в качестве порогов решающей статистики C. Полученные результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

N	20	50	100	200	300	400	500
$p = 0.95$	0.65	0.51	0.32	0.24	0.18	0.16	0.14
$p = 0.99$	0.85	0.65	0.40	0.33	0.27	0.23	0.20

В следующих экспериментах рассматривались регрессионные модели с разладкой в коэффициенте c_1. Для каждого значения объема выборки N и выбранного значения порога C рассчитывались оценки вероятностей ошибки 1-го (pr) и 2-го рода ($w2$), а также среднее время запаздывания в обнаружении разладки ($E\tau$) в 2000 независимых повторениях каждого эксперимента. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2.

N		20	50	100	200	300	400
C		0.85	0.65	0.40	0.33	0.25	0.21
pr		0.03	0.015	0.07	0.025	0.015	0.025
$c_1 = 2.0$	w_2	0	0	0			
	$E\tau$	3.96	7.73	8.04			
$c_1 = 1.5$	w_2		0.47	0.05	0		
	$E\tau$		18.02	18.04	28.4		
$c_1 = 1.3$	w_2			0.13	0.05	0	
	$E\tau$			29.0	50.1	53.3	
$c_1 = 1.2$	w_2				0.36	0.06	0.01
	$E\tau$				65.6	85.9	90.5

Из этих результатов можно заключить, что эффективное обнаружение структурных сдвигов малой величины требует больших значений объема "скользящего окна".

Далее была рассмотрена следующая динамическая регрессионная модель:

$$y_i = 2 + \rho y_{i-1} + u_i, \quad y_0 = 0,\ i = 1, 2, \ldots$$

где $u_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ставится задача последовательного обнаружения неизвестных изменений в коэффициенте авторегрессии ρ.

Как и в первой серии тестов, первом этапе рассматривалась регрессионная модель без структурных сдвигов с коэффициентом $\rho = 0.3$. В 2000 независимых повторениях каждого эксперимента рассчитывались значения максимума решающей статистики для различных значений объема "скользящего окна"N. Затем строился вариационный ряд максимумов решающей статистики и вычислялись значения 95- и 99-процентных квантилей этого ряда. Значения 99-процентного квантиля для различных объемов выборки N принимались далее в качестве порогов решающей статистики C. Полученные результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3.

N	20	50	100	200	300	400	500
$p = 0.95$	0.73	0.52	0.38	0.28	0.24	0.20	0.18
$p = 0.99$	1.30	0.90	0.63	0.41	0.38	0.32	0.25

Далее рассматривались регрессионные модели с изменениями в коэффициенте ρ. Для каждого значения объема выборки N и выбранного значения порога C рассчитывались оценки вероятностей ошибки 1-го (pr) и 2-го рода ($w2$), а также среднее время запаздывания в обнаружении разладки ($E\tau$) в 2000 независимых повторениях каждого эксперимента. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4.

N		20	50	100	200	300
C		1.30	0.90	0.63	0.41	0.38
pr		0.03	0.02	0.04	0.04	0.02
$\rho = 0.7$	w_2	0	0	0		
	$E\tau$	3.39	3.06	2.76		
$\rho = 0.5$	w_2	0.35	0.18	0.04	0	
	$E\tau$	9.6	20.5	34.2	18.3	
$\rho = 0.4$	w_2			0.74	0.20	0.07
	$E\tau$			39.3	80.5	60.5

2) Система одновременных уравнений

Рассматривалась следующая система одновременных эконометрических уравнений:

$$
\begin{aligned}
y_i &= c_0 + c_1 y_{i-1} + c_2 z_{i-1} + c_3 x_i + \epsilon_i \\
z_i &= d_0 + d_1 y_i + d_2 x_i + \xi_i \\
x_i &= 0.5 x_{i-1} + \nu_i \\
\epsilon_i &= 0.3 \epsilon_{i-1} + \eta_i,
\end{aligned}
$$

где $\xi_i, \nu_i, \eta_i,\ \ i = 1, 2, \dots$ независимые гауссовские последовательности $\mathcal{N}(0, 1)$.

Здесь $(y_i, z_i)^*$ - вектор эндогенных переменных, x_i - экзогенная переменная, $(1, y_{i-1}, z_{i-1}, x_i)^*$ - вектор предетерминированных переменных системы.

Динамика этой системы характеризуется следующим вектором коэффициентов: $\mathbf{u} = [c_0\ c_1\ c_2\ c_3\ d_0\ d_1\ d_2]$. Начальный стационарный режим описывается значениями коэффициентов [0.1 0.5 0.3 0.7 0.2 0.4 0.6].

В первой серии экспериментов рассматривалась модель с начальным вектором коэффициентов при отсутствии структурных сдвигов. Как и выше, по значению 99-процентного квантиля из ряда максимумов решающей статистики рассчитывался порог принятия решения для различных значений объема выборки N. Результаты приведены в таблице 5.

Table 5.

N	20	50	100	200	300	400
$p = 0.95$	0.99	0.67	0.49	0.39	0.30	0.25
$p = 0.99$	1.50	0.85	0.65	0.47	0.38	0.32

В следующей серии экспериментов рассматривались модели со структурными сдвигами по коэффициенту c_2. Для каждого значения объема выборки N и выбранного значения порога C рассчитывались оценки вероятностей ошибки 1-го (pr) и 2-го рода ($w2$), а также среднее время запаздывания в обнаружении разладки ($E\tau$) в 2000 независимых повторениях каждого эксперимента. Результаты приведены в таблице 6.

Таблица 6.

N		20	50	100	200
C		1.50	0.85	0.65	0.47
pr		0.04	0.06	0.05	0.06
$c(6) = 0.95$	w_2	0.09	0	0	0
	$E\tau$	3.80	1.71	1.21	1.01
$c(6) = 0.9$	w_2	0.19	0.02	0	0
	$E\tau$	4.83	2.46	1.04	1.10
$c(6) = 0.8$	w_2	0.45	0.15	0.04	0
	$E\tau$	6.52	9.20	13.2	11.2

Из этих результатов мы опять делаем вывод, что чем меньше размер структурного сдвига, тем больший объем "скользящего окна"N необходим для его эффективного обнаружения.

4. Практические применения

4.1 Модель спроса на деньги в Германии

Lutkepohl, Terasvirta, and Wolters (1999) исследовали стабильность модели спроса на деньги в Германии 1961-1995 годов в условиях важнейших социально-экономических трансформаций (в частности, падение Берлинской стены и объединение Западной и Восточной Германии в 1990 году). Использовались квартальные данные о денежном агрегате M1, индексе-дефляторе, реальном ВНП, одной из процентных ставок за период 1960(1)-1995(4). Данные доступны на WWW архиве данных журнала Journal of Applied Econometrics (http://qed.econ.queensu.ca/jae/1999-v14.5/lukepohl-terasvirta-wolters/).

Авторам удалось построить качественные коинтеграционные и ECM (error correction model) модели уравнения спроса на деньги в Германии за период 1961(1)-1990(2), в которые входят следующие показатели:

- $m = log(M1/PN)$ - логарифм реального M1 на душу населения;
- $p = log(P)$ - логарифм имлицитного дефлятора ВНП;
- $y = log(Y/PN)$- логарифм реального ВНП на душу населения;
- R -номинальная процентная ставка;
- N - численность населения;
- $Q1, Q2, Q3$ - квартальные сезонные дамми-переменные.

Модель коррекции регрессионных остатков, построенная авторами, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta m_t = \ & -0.30\Delta y_{t-2} - 0.67\Delta R_t - 1.00\Delta R_{t-1} - 0.53\Delta p_t \\ & -0.12m_{t-1} + 0.13y_{t-1} - 0.62R_{t-1} \\ & -0.05 - 0.13Q1 - 0.016Q2 - 0.11Q3 + \hat{u}_t.\end{aligned}$$

Все регрессионные коэффициенты в этой зависимости за исключением свободного члена являются статистически значимыми на уровне ошибки 1 процент, скорректированный показатель $R^2 = 0.943$.

Эта модель включает в себя ряд остатков долгосрочной коинтеграционной зависимости:

$$e_{t-1} = -0.12m_{t-1} + 0.13y_{t-1} - 0.62R_{t-1},$$

проверка которого по критерию Маккиннона-Дэвидсона подтвердила стационарность этого ряда.

Поэтому полученную модель коррекции регрессионных остатков следует признать статистически и эконометрически корректной: все знаки коэффициентов при факторах в полученных зависимостях согласуются с экономической теорией.

Эта модель была использована в работах Lutkepohl et al. (1999), Zeileis et al. (2005) для проверки наличия структурных сдвигов в полной выборке данных за период 1960(1)-1995(4). С использованием теста CUSUM, основанного на оценках МНК, Zeileis et al. (2005) обнаружили существенный структурный сдвиг в точке 1990(3).

Для обнаружения структурных сдвигов в модели спроса на деньги в Германии 1961-1995 годов в нами был использован предложенный в работе метод. При этом, в силу полупараметрического характера метода, конкретные значения коэффициентов в коинтеграционной и ECM моделях спроса на деньги в Германии не играют в данном методе существенной роли.

В эксперименте был взят объем скользящего "окна"наблюдений $N = 70$ и по значениям максимума решающей статистики за период 1961(1)-1980(4) рассчитан порог принятия решения о наличии структурного сдвига $C = 0.011$. С использованием этого порога были обнаружены два структурных сдвига в относительные моменты $n1 = 52$ $n2 = 61$, соответствующие событиям на реальной временной шкале 1990(2) и 1992(3) (Рис.1).

Эти результаты хорошо согласуются с моментами структурных сдвигов в исследуемой выборке данных, обнаруженными в работах Lutkepohl et al. (1999), Zeileis et al. (2005). Это дает основания утверждать, что предложенный метод хорошо приспособлен для обнаружения структурных сдвигов в реальных эконометрических данных.

4.2 Инфляция в России 1994-2005 годов

Приведем наиболее полную регрессионную модель для показателя "темп инфляции на потребительском рынке"(pi=CPI/100-1, где CPI - помесячный индекс потребительских цен), полученную на временном интервале 1994(1)-2004(12) и включающую следующий набор предикторов:

- инфляционные ожидания (pi(-1));

- темп роста денежной массы: mu=M2/M2(-1)-1, где M2 - денежный агрегат M2;

- темп роста номинального курса доллара: eps=E/E(-1)-1;

- темп роста тарифов на электроэнергию для конечных потребителей: piel;

- сезонная дамми-переменная: Seas.

Все переменные, входящие в модель, были проверены на стационарность с использованием теста Диккей-Фуллера. Проверка подтвердила, что все переменные имеют порядок I(0). Поэтому для построения модели для показателя темпа инфляции можно использовать методологию линейного регрессионного анализа. Полученная регрессионная модель на интервале 1994(1)-2005(12)имеет следующий вид (в скобках приведены значения t-статистик):

$$\begin{array}{llllllll} pi = & 0.0022 & + & 0.2734 & pi(-1)+ & 0.2105 & piel+ & 0.3547 \quad eps+ \\ & (0.214) & & (7.781) & & (5.353) & & (24.852) \\ & 0.1639 & mu(-6)+ & 0.012 & Seas- & 0.017 & Seas(-7) & \\ & (4.877) & & (2.312) & & (-3.515) & & \end{array}$$

Показатели качества этой зависимости: коэффициент детерминации R2 = 0.887; среднеквадратичная ошибка аппроксимации $\sigma = 0.015$; статистика Breusch-Godfrey на автокорреляцию остатков высокого порядка AR 1-7 F(7,111)=2.697, - вполне приемлемые.

Для мониторинга структурных сдвигов с использованием предложенного в работе метода существен лишь набор регрессоров на всем интервале наблюдений (этот набор должен выбираться "по максимуму", т.е. включать в себя все потенциально значимые факторы), а конкретные значения регрессионных коэффициентов не играют существенной роли.

Другим существенным моментом является выбор порога решающей статистики C. Для выбора этого порога в эксперименте был использован стационарный участок наблюдений 1995(7)-1998(1). При этом значение порога равнялось $C = 0.002$. Объем "скользящего окна"наблюдений $n = 30$.

Применение последовательного метода мониторинга структурных сдвигов дает следующий график максимумов решающей статистики на всем интервале наблюдений (Рис.2). Отчетливо видны два "всплеска": $n1 = 11$ и $n2 = 40$, соответствующие двум важнейшим событиям в макроэкономической политике России 1990-х годов: введению "валютного коридора"в июле 1995 года и финансовому кризису сентября-октября 1998 года. Эти точки представляют собой моменты структурных сдвигов в модели российской инфляции 1994-2005 годов.

Выводы

1. Предложен новый метод мониторинга структурных сдвигов в многомерных стохастических системах, который позволяет эффективно обнаруживать изменения коэффициентов и параметров эконометрических моделей по последовательным наблюдениям, включая изменения коэффициентов многофакторных динамических регрессионных моделей, параметров систем одновременных эконометрических уравнений, коэффициентов динамических систем в пространстве состояний.

2. Проведено имитационное моделирование предложенного метода для проверки эффективности мониторинга структурных сдвигов для конечных выборок данных. Рассматривались имитационные модели статической и динамической линейной регрессии, систем одновременных эконометрических уравнений с зависимыми шумами, моделей стохастических систем в пространстве состояний.

3. Предложенный метод был использован для мониторинга структурных сдвигов в следующих эконометрических моделях:

- Модель спроса на деньги в Германии 1960-1995 годов;

- Модель инфляции в России 1994-2005 годов с учетом монетарных и немонетарных факторов.

Предложенный в работе метод позволяет проводить эффективный мониторинг структурных сдвигов в этих эконометрических моделях. Обнаруженные структурные сдвиги, в одной стороны, хорошо согласуются с результатами других исследователей, а с другой стороны, соответствуют значимым событиям в макроэкономической политике Германии и России.

Список литературы

[1] **Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.** *Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965.*

[2] **Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.Н., Ширяев А.Н.***Вероятностно – статистические методы обнаружения спонтанных эффектов* // Труды МИАН.– **т.182.– М.,1988, С.4-23.**

[3] Ширяев А.Н. *Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения* // Теория вероятностей и ее применения.– 1963.– **т.8, 1, 26–51.**

[4] Ширяев А.Н. *Обнаружение спонтанных эффектов* // ДАН СССР. – 1961. – **138. – 799–801.**

[5] Ширяев А.Н. *Обнаружение разладки технологического процесса, I* // Теория веростностей и ее применения. – 1963. – **8, 3. – 264–281;** *II* Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8, 4. – 431–443.**

[6] Ширяев А.Н. *Некоторые точные формулы в задаче о разладке* // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – **10, 2. – 380–385.**

[7] Banzal R.K., Papantoni-Kazakos P. *An algorithm for detecting a change in a stochastic process* // IEEE Trans. on Inform. Theory. – 1983. – **20, 5. – 709–723.**

[8] Basseville M., Benveniste A. *Detection of abrupt changes in signals and dynamic systems. Springer. N.Y., 1986.*

[9] **Basseville M., Nikiforov I.** *Detection of abrupt changes: Theory and applications.* Prentice-Hall, N.Y., **1993.**

[10] Chu C., Stinchcombe M., White H. *Monitoring structural change* // Econometrica. – 1996. – **64, 5, pp. 1045–1065.**

[11] Girshick M.A., Rubin H. *A Bayes approach to a quality control model* // Annals of Mathematical Statistics. – 1952. – **23, 1, 114–125.**

[12] **Horvath L., Huskova M., Kokoszka P., Steinebach J.** *Monitoring changes in linear models* // Journal of Statistical Planning and Inference. - **2004, 126, pp.225-251.**

[13] **Lai T.L.** *Information bounds and quick detection of parameter changes in stochastic systems* // IEEE Transactions on Information Theory. – 1998. – **44, 2917–2929.**

[14] **Lai T.L.** *Sequential multiple hypothesis testing and efficient fault detection-isolation in stochastic systems* // IEEE Transactions on Information Theory. – 2000. – **46, pp. 595–608.**

[15] **Leisch F., Hornik K., Kuan CM** *Monitoring structural changes with the generalized fluctuation test* // Econometric Theory. - **2000, 16, pp.835-854.**

[16] **Lorden G.** *Procedures for reacting to a change in distribution* // Annals of Mathematical Statistics. – 1971. – **42, 6, pp. 1897–1908.**

[17] **Moustakides G.V.** *Optimal stopping times for detecting changes in distribution* // Ann.Stat. – 1986. – **14. –** 1379–1387.

[18] **Nikiforov I.** *A generalized change detection problem* // IEEE Transactions on Information Theory. – 1995. – **41, 1. – 171–187.**

[19] **Nikiforov I.** *Two strategies in the problem of change detection and isolation* // IEEE Transactions on Information Theory. – 1997. – **43, 2. – 770–776.**

[20] **Page E.S.** *A test for a change in a parameter occuring at an Unknown Point* // Biometrika. – 1955. – **42. –** 523–526.

[21] **Perron P.** *The Great Crash, the oil price shock and the unit root hypothesis* // Econometrica. – 1989. – **57. –** 1361–1401.

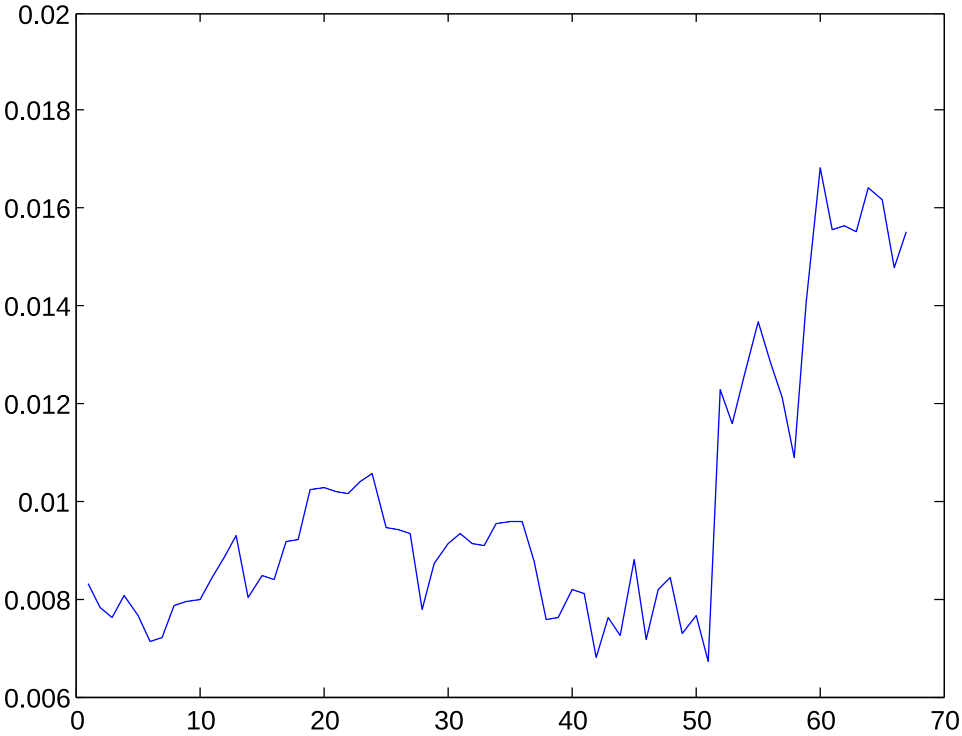
[22] **Pollak M.** *Optimal detection of a change in distribution* // Annals of Statistics. – 1985. – **13. –** 206–227.

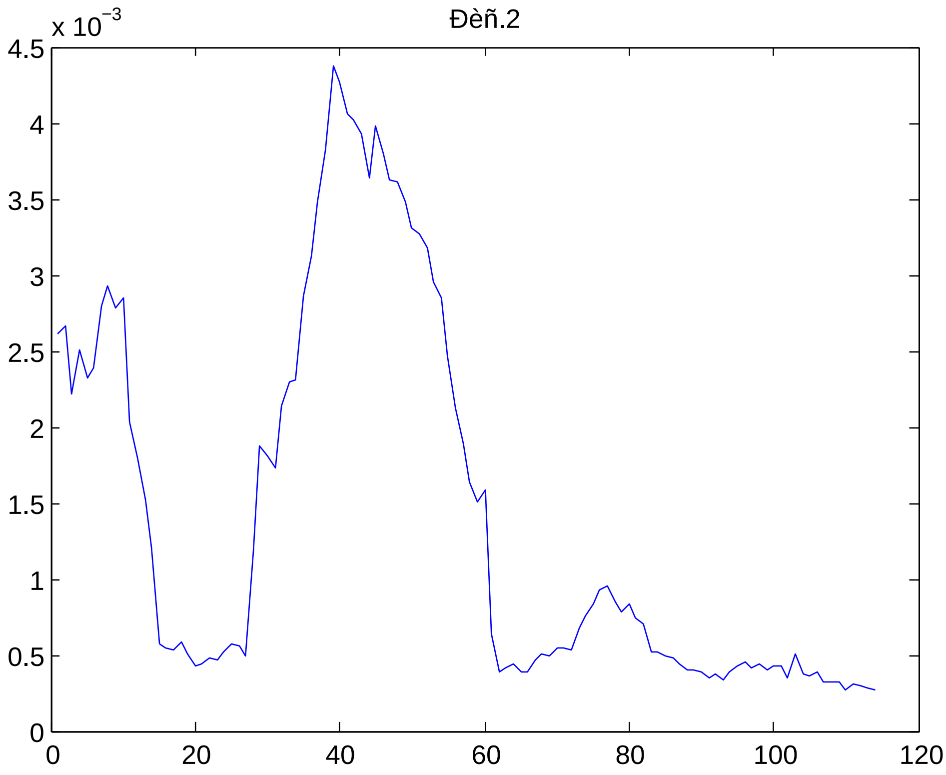
[23] **Willsky A.S.** *A survey of design methods for failure detection in dynamic systems* // Automatica. – 1976. – **12. – 601–611.**

[24] **Willsky A.S., Jones H.L.** *A generalised likelihood ratio approach to detection and estimation of jumps in linear systems* // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1976. – **AC–21, 1. – 108–112.**

[25] **Zeileis A., Leisch F., Kleiber C., Hornik K.** *Monitoring structural change in dynamic econometric models* // Journal of Applied Econometrics. - **2005, 20, pp.99-121.**

[26] **Lutkepohl H., Terasvirta T., Wolters J.** *Investigating stability and linearity of a German money demand function* // Journal of Applied Econometrics. - **1999, 14, pp.511-525.**


0.02
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0
10
20
30
40
50
60
70



Đèñ.2
x 10^-3
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
20
40
60
80
100
120